Межмуниципальный методический центр учителей математики

Сборник методических материалов

2017-2018 уч. год

Управление образования администрации
муниципального образования Абдулинский городской округ
Оренбургской области

Решение экономических задач при подготовке к ЕГЭ

г.Абдулино 2018г.

Содержание

Текстовая задача с экономическим содержанием **– относительно новый вид заданий, появившихся в** КИМ ЕГЭ профильного уровня.

Решение таких задач связано со знанием некоторых специфических математических моделей из области экономики, умением переводить сформулированные в виде текста условия в уравнения и неравенства и пониманием того, как решения полученных уравнений и неравенств соотносятся с тем, что написано в условии задачи, – то есть какой смысл имеют полученные результаты.

С чего начать подготовку к решению экономической задачи?

Решение любой текстовой задачи складывается из нескольких основных моментов:

• чтение условия задачи**; читайте его до тех пор, покуда сможете, не подглядывая в текст, объяснять суть описанного в задаче процесса (без конкретных числовых данных, конечно, – зазубривать ничего не нужно);**

• выбор переменных**; для каждого типа задач существуют рекомендации, какие величины лучше всего обозначать как переменные (и это не всегда те величины, о которых идет речь в вопросе задачи); переменных при решении текстовой задачи нужно вводить столько, сколько их нужно для того, чтобы просто и логично составить уравнения и неравенства (не бойтесь, если переменных оказалось слишком много – например, больше, чем число уравнений: если вы все делаете правильно, то «лишние»** переменные взаимно уничтожатся или сократятся**; еще один вариант – в процессе решения надо будет найти не сами переменные по отдельности, а какую-либо их комбинацию);**

• составление уравнений и неравенств**, формализация того, что необходимо найти в процессе решения задачи; при составлении уравнений обращайте внимание на единицы измерения – они должны быть одинаковыми для всех одноименных величин;**

• решение полученного уравнения**, неравенства или системы;**

• исследование полученного результата и нахождение ответа **на вопрос задачи.**

Критерии оценивания задания №17 ЕГЭ
(Задача с экономическим содержанием)

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше.	0
Максимальный балл	3

Виды задач:

1) *Кредиты с равными (аннуитетными) платежами*
2) *Кредиты с дифференцированными платежами*
3) *Вклады, сложные проценты*
4) *Оптимальный выбор*

Основные формулы для решения задач:

1) **1% - это 0,01**

2) **Основные соотношения и выражениями, встречающиеся при решении задач на проценты:**

- **Число** a **составляет** $p\%$ **от числа** $в$:

  $$a = \frac{b}{100} \cdot p = 0{,}01bp$$

- **Число** a **увеличили на** $p\%$: $a\cdot(1+0{,}01p)$

- **Число** a **увеличили сначала на** $p\%$, **а потом еще на** $q\%$:

  $a\cdot(1+0{,}01p)\cdot(1+0{,}01q)$

- **Число** a **уменьшили на** $p\%$: $a\cdot(1 - 0{,}01p)$

3) **Задачи, связанные с изменением цены**

Пусть S_o – первоначальная цена, S – новая (окончательная) цена.

- **Повышение цены на** $a\%n$ **раз на** $a\%$

  $S= S_o \cdot(1+0{,}01a)S= S_o \cdot(1+0{,}01a)^n$

- **Понижение цены на** $a\%n$ **раз на** $a\%$

  $S= S_o \cdot(1-0{,}01a)$ $\qquad$ $S= S_o \cdot(1-0{,}01a)^n$

- **Удобнопользоватьсясхематичнойзаписью:**

  $S_o \cdot(1+0{,}01a)$

  $a\%$

  $Sod\%$

  $S_o\cdot(1+0{,}01a)(1-0{,}01d)$

Решение «банковских» задач

Задача №1. Нахождение количества лет выплаты кредита.

Максим хочет взять в банке кредит 1,5 миллиона рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными платежами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка- 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?

Решение.

1)В конце первого года долг составит: 1500000 · 1,1 – 350000 =1300000 (руб)

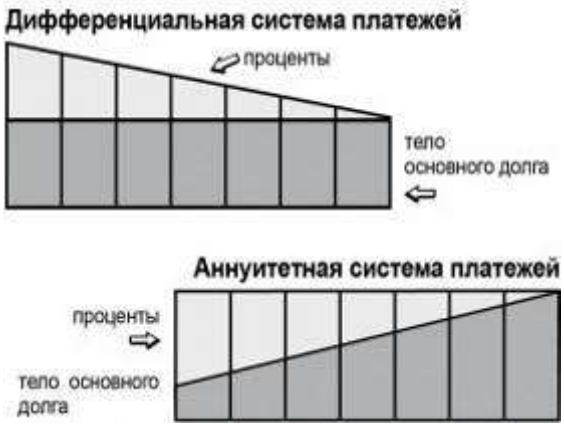
2) В конце второго года долг составит: 1300000 · 1,1 – 350000 = 1080000 (руб)

3)В конце третьего года долг составит: 1080000 · 1,1 – 350000 = 838000 (руб)

4)В конце четвертого года долг составит: 838000 · 1,1 – 350000 = 571800(руб)

5)В конце пятого года долг составит: 571800 · 1,1 – 350000 = 278980(руб)

6) В конце шестого года долг составит: 278900 · 1,1 =306878 (руб)



Эта сумма менее 350000 руб. Значит, кредит будет погашен за 6 лет. **Ответ: 6 лет**

Задача №2. Вычисление процентной ставки по кредиту.

31 декабря 2014 года Валерий взял в банке 1000000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая. 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Валерий

переводит в банк очередной транш. Валерий выплатил кредит за два транша, то есть за два года. В первый раз Валерий перевел в банк 660000 рублей, во второй раз – 484000 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Валерию?

Решение. Пусть а - процентная ставка по кредиту. 1)В конце первого года долг составит:

1000000 · (1 + 0,01· а) – 660000 = 340000 + 10000·а

2) В конце второго года долг составит: (340000 + 10000·а) · (1 + 0,01·а) – 484000.

По условию задачи кредит будет погашен за два года. Составляем уравнение: (340000 + 10000·а) · (1 + 0,01·а) – 484000 = 0;

a^2 + 134·а – 1440 =0

Решая уравнение, получаем, что а = 10. **Ответ: 10%**

*Задача №3*Нахождение суммы кредита.

31 декабря 2014 года Максим взял в банке некоторую сумму денег в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами, то есть за 4 года?

Решение. Пусть S – сумма кредита.

1)В конце первого года долг составит: (1,1х – 2928200) рублей

2) В конце второго года долг (в рублях)составит:

(1,1х – 2928200)·1,1 – 2928200 = 1,21х – 3221020 – 2928200 = 1,21х – 6149220

3) В конце третьего года долг (в рублях)составит:

(1,21х – 6149220)·1,1 – 2928200 = 1,331х – 6764142 – 2928200 =

=1,331х – 9692342

4) В конце четвертого года долг (в рублях) составит 2928200 рублей: (1,331x – 9692342)·1,1 =2928200;

1,4641x – 10661576 = 2928200;

1,4641x = 13589776;

x = 9281999,8.

Значит, сумма кредита равна 9282000 рублей. **Ответ: 9282000 руб.**

Задача №4. Нахождение ежегодного транша.

31 декабря 2014 года Роман взял в банке 8599000 рублей в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга(то есть увеличивает долг на 14%), затем Роман переводит в банк X рублей.

Какой должна быть сумма X, чтобы Роман выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Решение.

1)В конце первого года долг составит:

8599000·1,14 – X = 9802860 – X

2) В конце второго года долг составит: (9802860 - X)·1,14 – X=11175260 –2,14·X

3) В конце третьего года долг (в рублях) составит: (11175260 – 2,14·X) ·1,14 – X=12739796 – 3,4396·X. Составимуравнение:

12739796 – 3,4396·X= 0

X=3703860 рублей

Ответ: ежегодный транш составит 3703860 рублей.

Российский математик XIX в. П.Л. Чебышев говорил, что «особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами длядостижениями наибольшей выгоды». С такими задачами в наше время приходится иметь дело представителям самых разных специальностей: инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции; конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей; экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными, и т. д.

Задачи подобного рода носят общее название —*задачина оптимизацию*(от латинского слова optimum— «наилучший»), В самых простых задачах на оптимизацию мы имеем дело с двумя величинами, одна из которых зависит от другой, причем надо найти такое значение второй величины, при котором первая принимает свое наименьшее или наибольшее, (наилучшее в данных условиях) значение.

Решение задач на оптимизацию

Задачи на оптимизацию решают по обычной схеме из трех этапов математического моделирования: 1) составление математической модели; 2)

работа с моделью; 3) ответ на вопрос задачи. Прежде чем переходить к конкретным примерам решения задач на оптимизацию, дадим некоторые рекомендации методического плана.

Первый этап.*Составление математической модели.*

1) Проанализировав условия задачи, выделите *оптимизируемую величину* (сокращенно: О. В.), т. е. величину, о наибольшем или наименьшем значении которой идет речь. Обозначьте ее буквой y (или S, V, R, t — в зависимости от фабулы).

2) Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить О. В., примите за *независимую переменную*(сокращенно: Н. П.) и обозначьте ее буквой x (или какой-либо иной буквой). Установите *реальные границы* изменения Н. П. (в соответствии с условиями задачи), т. е. область определения для искомой О. В.

3) Исходя из условий задачи, выразите y через x.Математическая модель задачи представляет собой функцию $y = f(x)$ с областью определения X, которую нашли на втором шаге.

Второй этап.*Работа с составленной моделью.* Наэтомэтапе для функции $y = f(x)$, $x \in X$найдите$y_{наим.}$или$y_{наиб.}$взависимости от того, что требуется в условии задачи. При этом используются теоретические установки, которые мы получили в п. 1 данного параграфа.

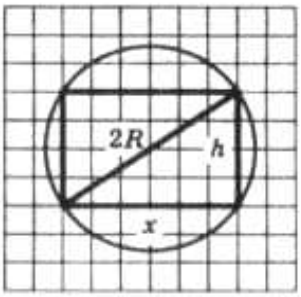
Третий этап.*Ответ на вопрос задачи.*

Здесь следует дать конкретный ответ на вопрос задачи, опираясь на результаты, полученные на этапе работы с моделью.

Задача 1.Прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна произведению ее ширины на квадрат высоты. Какое сечение должна иметь балка, вытесанная из цилиндрического бревна радиуса R, чтобы ее прочность была наибольшей?

Решение. Первый этап.*Составление математической модели.*

1) Оптимизируемая величина (О. В.) — прочность балки, поскольку в задаче требуется выяснить, когда прочность балки будет наибольш ей. Обозначим О. В. буквой *y.*



2) Прочность зависит от ширины и высоты пря моугольника, служащего осевым сечением балки. Объявим независимой переменной (Н. П.) ширин у балки, обозначим ее буквой *x.* Поскольку осевое сечение представляет собой прямоугольник, впис анный в окружность радиуса R (рис. 1), то $0 \leq x \leq 2R$ (при $x = 0$ и при $x = 2R$прямоугольник «вырож дается» в отрезок, равный диаметру окружности) — таковы реальные границы изменения независи мой переменной: $X = [0; 2R]$.

3) Высота h прямоугольника связана с его шириной соотношением $x^2 + h^2 = 4R^2$(по теореме Пифагора).Значит,$h^2 = 4R^2 - x^2$.Прочность балки *y* пропорциональна произведениюxh^2,т. е. $y = kxh^2$

(где коэффициент k — некоторое положительное число). Значит,

$y = kx(4R^2 - x^2)$, где$x \in [0; 2R]$

Математическая модель задачи составлена.

<u>Второй этап.</u>*Работа с составленной моделью.*

На этом этапе для функции $y = kx(4R^2 - x^2), x \in [0; 2R]$ надо найти$y_{наиб.}$.Воспользуемся алгоритмом из п. 1. Имеем:

$y = 4kR^2x - kx^3$;

$y' = 4kR^2 - 3kx^2$.

Критических точек нет. Найдем стационарные точки. Приравняв производную нулю, получим

$$4kR^2 - 3kx^2 = 0;$$

$$x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}, x_2 = -\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Заданному отрезку $[0; 2R]$ принадлежит лишь точка x_1.

Осталось вычислить значения функции $y = kR^2x - kx^3$ в точке x_1 и на концах отрезка, т. е. в точках 0 и *2R:*

$$f(0) = 0, \qquad f(2R) = 0, \qquad f(x_1) = f(\frac{2R}{\sqrt{3}}) > 0.$$

Значит, $y_{наиб.} = f(\frac{2R}{\sqrt{3}})$

Третий этап.*Ответ на вопрос задачи.*

В задаче спрашивается, какое сечение должна иметь балка наибольшей прочности. Мы выяснили, что ширина *x* прямоугольника, служащего осевым сечением наиболее прочной балки, равна $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Найдем высоту:

$$h^2 = 4R^2 - x^2 = 4R^2 - \frac{4R^2}{3} = \frac{8R^2}{3}.$$

Значит, $h = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, а потому $\frac{h}{x} = \sqrt{2}$

Ответ. Сечением балки должен служить прямоугольник, у которого отношение высоты к ширине равно $\sqrt{2}$

Замечание. Квалифицированные мастера приходят к такому же результату, опираясь на свой опыт, но, разумеется, они принимают указанное отношение равным 1,4 (приближенное значение иррационального числа $\sqrt{2}$ как раз равно 1,4).

Задача 2. Бак, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать *V* литров жидкости. При какой стороне основания площадь поверхности бака (без крышки) будет наименьшей?

Решение. Первый этап.*Составление математической модели.*

1) Оптимизируемая величина (О. В.) — площадь поверхности бака, поскольку в задаче требуется выяснить, когда эта площадь будет наименьшей. Обозначим О. В. буквой *S*.

2) Площадь поверхности зависит от измерений прямоугольного параллелепипеда. Объявим независимой переменной (Н. П.) сторону квадрата, служащего основанием бака; обозначим ее буквой *x*. Ясно, что $x > 0$. Других ограничений нет, значит, $0 < x < +\infty$. Таковы реальные границы изменения независимой переменной: $X = (0; +\infty)$.

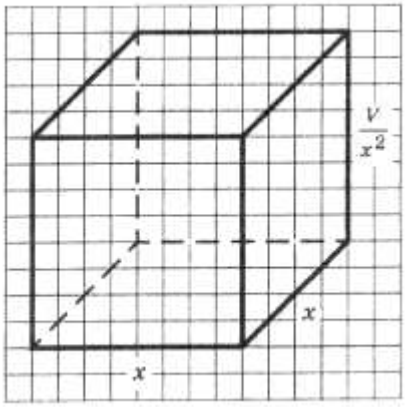
3) Если h — высота бака, то $V = x^2 h$, откуда находим $h = \frac{V}{x^2}$.

На рис. 2 изображен прямоугольный параллелепипед, казаны его измерения. Поверхность бака состоит из квадрата со стороной x и четырех прямоугольников со сторонами x и $\frac{V}{x^2}$. Значит, $S = x^2 + 4 * \frac{V}{x^2} * x = x^2 + \frac{4V}{x}$.

Итак, $S = x^2 + 4 * \frac{V}{x}, где\ x \in (0; +\infty)$

Математическая модель задачи составлена.

<u>Второй этап.</u>*Работа с составленной моделью.* На этом этапе для функции, $S = x^2 + 4 * \frac{V}{x}, где\ x \in (0; +\infty)$ надо найти $y_{наим.}$



производная функции:$S' = 2x - 4 * \frac{V}{x^2}$,

$$S' = \frac{2(x^3 - 2V)}{x^2}$$

На промежутке (0; +∞) критических точек нет, только одна: S'=0 при $x = \sqrt[3]{2V}$.

Заметим, что при $x < \sqrt[3]{2V}$ выполняется неравенство $S' < 0$, а при $x > \sqrt[3]{2V}$ выполняется неравенство $S' > 0$. Значит, $x = \sqrt[3]{2V}$ — единственная стационарная точка, причем точка минимума функции на заданном промежутке, а потому, согласно теореме из п. 1, в этой точке функция достигает своего наименьшего значения.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.* В задаче спрашивается, какой должна быть сторона основания, чтобы бак имел наименьшую поверх ность. Мы выяснили, что сторона квадрата, служащего основанием так ого бака, равна $\sqrt[3]{2V}$.

Ответ: $\sqrt[3]{2V}$

Решение одной задачи на оптимизацию различными способами

Задача. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение:

1 способ – с помощью составления опорной линейной функции

Ознакомимся с решением экстремальных задач по теме «Линейная функция». Решение этих задач сводится к нахождению экстремума линейной функции $y = кx + в$, где $к$ и $в$ – постоянные. Если эту функцию рассматривать на отрезке $[\alpha; \beta]$, то она будет иметь на нём наибольшее и наименьшее значение. При $к > 0$ наименьшее значение у принимает в точке $x = \alpha$, а наибольшее – в точке $x = \beta$, при $к < 0$ функция у в точке $x = \alpha$ принимает наибольшее значение, а в точке $x = \beta$ - наименьшее.Решим задачу.

А)Пусть х рабочих в 1 шахте добывают алюминий ежедневно, тогда (100-х) рабочих добывают никель. Тогда количество добытого алюминия равно (5х) кг, количество добытого никеля – 15(100-х) кг.

Пусть у рабочих во 2 шахте добывают алюминий ежедневно, (300-у) рабочих добывают никель. Тогда количество добытого алюминия равно (15у) кг, количество добытого никеля – 5(300-у) кг.

Всего количество добытого алюминия: (5х+15у);

количество добытого никеля: 15(100-х)+ 5(300-у)=1500-15х+1500-5у=3000-15х-5у.

Функция сплава: F(x) = (5x+15y) + (3000-15x-5y); F(x) = -10x+10y + 3000;

Учтем условие, при котором производится сплав алюминия и никеля: 2 кг алюминия и 1 кг никеля. Тогда 5x+15y=2(3000-15x-5y). Отсюда y = -1,4x+600. Поставим это выражение в функцию сплава: F(x) = -10x+10(-1,4x+600) + 3000;

F(x) = -24x +5400. Эта линейная функция является убывающей. Наибольшее значение она принимает при x=0. Значит, F(100)=5400.

Ответ:5400

Б)<u>Составим таблицу</u>

		Количество рабочих	Добыча за 1 час
1 шахта	никель	x	3x
	алюминий	100-x	1·(100-x)
2 шахта	никель	y	1·y
	алюминий	300-y	3·(300-y)

Так как в промышленности для сплава нужно в 2 раза больше алюминия, чем никеля, и на обоих шахтах работают по 5 часов в день, то $5(1\cdot(100-x)+3\cdot(300-y))=5(2(3x+1y))$. После преобразований получим: $y=200-1{,}4x$. Функция выпуска сплава $m(x,y)=5(3x+(100-x)+y+3(300-y))$. Подставим y, тогда $m(x)=3000+24x$. Поскольку $x\leq 100$, то максимальное значение $m(x)=5400$ достигается при $x=100$

Ответ: 5400 кг сплава будет ежедневно выпускать промышленность.

2 способ – с помощью логических рассуждений и составления уравнения

Так как в 1 шахте добывают больше никеля, то для наибольшей выгоды логично допустить, чтобы все рабочие в этой шахте добывали никель. Тогда в 1 шахте будет добыто 1500 кг никеля. Во 2 шахте больше добывают алюминия. Пусть все 300 рабочих добывают алюминий. Тогда алюминия будет добыто 4500 кг. Для сплава нужно алюминия в 2 раза больше, чем никеля. Значит, на 1500 кг никеля нужно 3000 кг алюминия. А у нас алюминия больше. Рассуждаем дальше. Значит, рабочих 2 шахты нужно перераспределить на добычу не только алюминия, но и на добычу никеля с учетом пропорции сплава. Пусть x рабочих 2 шахты добывают алюминий, тогда (300-x) рабочих добывают никель. Составим уравнение:

$5\cdot 3\cdot x=2\cdot(5\cdot(300-x)+1500)$;

$15x=6000-10x$;

$x=240$.

Найдем y: $y=300-240=60$.Значит, 240 рабочих должны добывать алюминий, 60 рабочих добывать никель. Тогда алюминия будет добыто $240\cdot 5\cdot 3=3600$ (кг), никеля $1500+60\cdot 5=1800$(кг). Всего $3600+1800=5400$ (кг).

Ответ: 5400 кг

3 способ – методом перебора

Так как в 1 шахте добывают больше никеля, то пусть все рабочие добывают никель. Тогда в 1 шахте будет добыто 1500 кг никеля. Во 2 шахте больше добывают алюминия. Пусть все 300 рабочих добывают алюминий. Тогда

алюминия будет добыто 4500 кг. Для сплава нужно алюминия в 2 раза больше, чем никеля. Значит, на 1500 кг никеля нужно 3000 кг алюминия. А у нас алюминия больше. Что делать? Значит, рабочих 2 шахты нужно перераспределить на добычу не только алюминия, но и на добычу никеля. Применим метод перебора.

Допустим, что 10 рабочих 2 шахты добывают никель, а 290 рабочих – алюминий. Тогда алюминия будет добыто всего 290·5·3= 4350 (кг), а никеля – 1500 + 10·5= 1550 (кг). Замечаем, что данные не удовлетворяют пропорции 1: 2. Значит, необходимо увеличить количество рабочих, добывающих никель.

Допустим, что 20 рабочих 2 шахты добывают никель, а 280 рабочих – алюминий. Тогда алюминия будет добыто всего 280·5·3= 4200 (кг), а никеля – 1500 + 20·5= 1600 (кг). Замечаем, что данные не удовлетворяют пропорции 1: 2. Значит, необходимо опять увеличить количество рабочих, добывающих никель.

Допустим, что 40 рабочих 2 шахты добывают никель, а 260 рабочих – алюминий. Тогда алюминия будет добыто всего 260·5·3= 3900 (кг), а никеля – 1500 + 40·5= 1700 (кг). Замечаем, что данные не удовлетворяют пропорции 1: 2. Значит, необходимо опять увеличить количество рабочих, добывающих никель.

Допустим, что 60 рабочих 2 шахты добывают никель, а 240 рабочих – алюминий. Тогда алюминия будет добыто всего 240·5·3= 3600 (кг), а никеля – 1500 + 60·5= 1800 (кг). Замечаем, что данные удовлетворяют пропорции 1: 2, то есть на 1 часть никеля приходится 2 части алюминия:

1800: 3600. Итак, всего будет добыто 3600+1800=5400 (кг) алюминия и никеля. А количество изделий из сплава тогда будет равно 1800 штук.

Ответ: 5400 кг

Практикум по решению задач

Задача №17. (Входная к.р. от 12.09.17, вариант 1)

В бассейн проведены три трубы. Первая труба наливает 30 м^3 воды в час. Вторая труба наливает в час на $3V$ м^3 меньше, чем первая ($0 < V < 10$), а третья труба наливает в час на $10V$ м^3 больше

первой. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают 30% бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся 0,7 бассейна. При каком значении *V* бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

Решение.

Пусть вначале первая и вторая трубы, работая вместе t_1 ч, налили $(30+30-3V)t_1=(60-3V)t_1=0{,}3V_Б$ бассейна, далее все три трубы, работая вместе t_2 ч, налили $(30+30-3V+30+10V)t_2=(90+7V)t_2=0{,}7V_Б$ бассейна. Тогда время наполнения бассейна будет равно

$$t(V)=t_1+t_2=\frac{0{,}1V_Б}{20-V}+\frac{0{,}7V_Б}{90+7V}\ t=0{,}1V_Б\left(\frac{1}{20-V}+\frac{7}{90+7V}\right).$$

Необходимо найти наименьшее значение этой функции на интервале (0;10).

$$t(V)=0{,}1V_Б\left(\frac{1}{20-V}+\frac{7}{90+7V}\right)=0{,}1V_Б\frac{90+7V+140-7V}{-7V^2+50V+1800}=$$

$$=V_Б\frac{23}{-7V^2+50V+1800}=V_Б\frac{23}{-7\left(V^2-\frac{50}{7}V+\left(\frac{25}{7}\right)^2\right)+\frac{25^2}{7}+1800}=$$

$$=V_Б\frac{23}{\frac{25^2}{7}+1800-7\left(V-\frac{25}{7}\right)^2}.$$

Отсюда следует, что функция $t(V)$ будет иметь минимум на интервале (0;10) в его точке $V=\frac{25}{7}$.

Ответ: $\frac{25}{7}$.

1. Задача №17. (Входная к.р. от 12.09.17, вариант 2)

По бизнес-плану предполагается изначально вложить в четырёхлетний проект 10 млн. рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по целому числу *n* млн. рублей в первый и второй годы, а также по целому числу *m* млн. рублей в третий и четвёртый годы.

Найдите наименьшие значения *n* и *m*, при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

Решение.

К началу 2-го года будет $1{,}15 \cdot 10 + n = 11{,}5 + n$ млн. руб. вложений, а к началу 3-го года:
$1{,}15(11{,}5 + n) + n = 13{,}225 + 2{,}15n$.

По условию $13{,}225 + 2{,}15n \geq 20$. Наименьшее целое решение $n = 4$. Тогда к началу 3-го года будем иметь
$13{,}225 + 8{,}6 = 21{,}825$ млн. руб.

К началу 4-года имеем $1{,}15 \cdot 21{,}825 + m$ млн. руб., а в конце проекта:

$$1{,}15(1{,}15 \cdot 21{,}825 + m) + m = 1{,}3225 \cdot 21{,}825 + 2{,}15m = 28{,}8635625 + 2{,}15m.$$

По условию $28{,}8635625 + 2{,}15m \geq 30$ Получаем, что $m = 1$ - наименьшее целое решение.

Ответ: 4 и 1 млн. руб.

2. Задача №17. (Входная к.р. от 12.09.17, вариант 3)

Некто в 2016 году взял в банке кредит в 6,6 млн. рублей под процент, который начисляется один раз в год в середине года. В 2017, 2018 и 2019 году, в начале года, он вносил равные суммы так, что после начисления процента на оставшуюся сумму в июле, долг на конец года был равен 6,6 млн. рублей. Затем, в 2020 и 2021 году, остаток долга выплачивался равными суммами так, что кредит был закрыт в 2021 году. Каков был процент по кредиту, если за весь период кредитования было выплачено 12,6 млн. рублей?

Решение. Допустим, банк начисляет *a* процентов, то есть умножает остаток долга на $1 + \frac{a}{100}$. Обозначим это выражение за *x*. Тогда первые три платежа составляли $6{,}6x - 6{,}6$ миллионов рублей.

Пусть четвертый и пятый платежи составляли *N* миллионов рублей. Тогда $N = (6{,}6x - N)x$, откуда $N = \frac{6{,}6x^2}{1+x}$.

По условию $3(6{,}6x - 6{,}6) + 2 \cdot \frac{6{,}6x^2}{1+x} = 12{,}6$. Решим это уравнение:

$$3(11x - 11) + 2 \cdot \frac{11x^2}{1+x} = 21 \Leftrightarrow \frac{22x^2}{1+x} = 54 - 33x \Leftrightarrow 22x^2 = (54 - 33x)(1 + x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 55x^2 - 21x - 54 = 0.$$

Из смысла задачи следует, что следует исключить отрицательный корень. Таким образом, $x = \frac{6}{5}$. Тогда банк начислял 20% годовых.

Ответ: 20%.

3. Задача №17. (Кр. от 26.10.17, вариант 1)

Вклад в размере 10 млн. рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн. рублей.

Решение.

В конце первого года вклад составит 11 млн. рублей, а в конце второго - 12,1 млн. рублей. Пусть искомая сумма равна x (млн. рублей). Тогда в начале третьего года вклад составит $12,1+x$, а в конце - $13,31+1,1x$. В начале четвёртого года вклад составит $13,31+2,1x$, а в конце - $14,641+2,31x$.

По условию, нужно найти наименьшее целое x, для которого выполнено неравенство

$$14,641+2,31x \geq 30 \Leftrightarrow x \geq 6\frac{1499}{2310}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства - число 7. Значит, искомая сумма — 7 млн. рублей.

Ответ: 7 млн. рублей.

4. Задача №17. (Кр. от 26.10.17, вариант 2)

Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние.

Решение.

Обозначим буквой t время, прошедшее с начального момента времени. Поскольку каждый велосипедист движется по взаимно перпендикулярным дорогам, то расстояние между ними может быть вычислено по теореме Пифагора. Рассмотрим $f(t)$ - квадрат длины в каждый момент времени, тогда:

$$f(t)=(5-40t)^2+(3-30t)^2=25-400t+1600t^2+9-180t+900t^2=$$

$$=2500t^2-580t+34.$$

Таким образом, $f(t)=2500t^2-580t+34$, $t\geq 0$. У данной квадратичной функции есть наименьшее значение, которое достигается при

$$t_0=\frac{580}{2\cdot 2500}=0{,}116 \text{ (ч)} = 6{,}96 \text{ (мин)}.$$

Тогда:

$$f(0{,}116)=2500\cdot 0{,}116^2-580\cdot 0{,}116+34=0{,}36.$$

Отсюда следует, что минимальное расстояние между велосипедистами равно $\sqrt{f(0{,}116)}=\sqrt{0{,}36}=0{,}6$ (км), и будет достигнуто через 6,96 мин.

Ответ: 6,96 мин, 0,6 км.

5. Задача №17. (Кр. от 26.10.17, вариант 3)

Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение.

Если Алексей продаст бумагу в течение *k*-го года, то через тридцать лет после покупки сумма на его счёте будет равна $(2k+5)\cdot 1,1^{30-k}$. Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_k=(2k+5)\cdot(1,1)^{30-k}$, где *k* пробегает целые значения от 1 до 30. Рассмотрим приращение

$$b_k=a_k-a_{k-1}=(1,1)^{30-k}(2k+5-1,1\cdot(2(k-1)+5))=(1,1)^{30-k}(1,7-0,2k).$$

Отсюда $b_k>0$ при $k\le 8$ и $b_k<0$ при $k>8$. Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k=8$. Продать бумагу следует в течение восьмого года.

Ответ: в течение восьмого года.

6. ***Пример*. Митя, Антон и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200 000 рублей. Митя внес 14% уставного капитала, Антон – 42 000 рублей, Гоша – 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1 000 000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях.**

Решение:

Митя внес 14% или 0,14 уставного капитала. Гоша внес 0,12 уставного капитала. Антон внес $\frac{42\,000}{200\,000}=\mathbf{0,21}$ уставного капитала, а Борис внес 1 – 0,21 – 0,14 – 0,12 = 0,53 уставного капитала. Из прибыли размером в 1 000 000 рублей Борис получит $\mathbf{0,53\cdot 1\,000\,000=530\,000}$ рублей.

Ответ: 530 000 рублей.

7. ***Пример.*За некоторый период времени у господина Иванова количество акций увеличилось на 15%. На сколько процентов увеличилась общая стоимость акций господина Иванова, если цена каждой акции увеличилась на 20%?**

Решение. Пусть S_0 – цена одной акции, n – количество акций, $S_0\cdot n$ – общая стоимость акций. Эти величины связаны формулой $S = S_0\cdot n$.

Составим таблицу:

	Цена одной акции	Количество акций	Общая стоимость
Было	S_0	n	$S_0\cdot n$
Стало	$1,2S_0$	1,15n	$1,38S_0\cdot n$

Можно сразу сделать вывод: общая стоимость акций Sувеличилась в 1,38 раз, поэтому стоимость акций увеличилась на 38%.

Или, используя формулу процентного «прироста», находим искомую величину:

$\frac{1{,}38\,S_0n - S_0n}{S_0n} \cdot 100 = 38(\%)$.

Ответ: 38%.

8. ***Пример.*** **В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металла так, чтобы завод мог произвести <u>наибольшее</u> количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?**

Решение: В первой области 50 рабочих отработают 500 часов в сутки. Пусть z человек выпускают алюминий. Количество металла выпущенное в первой области $z \cdot 0{,}2 + (500 - z) \cdot 0{,}1$ кг.
А во второй области так же 500 человеко-часов и по условию задачи
$x^2 + y^2 = 500$, т.е. $x^2 = 100$, $y^2 = 400$;
$x = 10$, $y = 20$.
10 кг алюминия и 20 кг никеля добывают во второй области.
Так как никеля выпускают в 2 раза больше,
то $2(0{,}2z + 10) = 50 - 0{,}1z + 20$,
$0{,}4z + 20 = 70 - 0{,}1z$,
$0{,}5z = 50$,
$z = 100$.
$S(z) = 0{,}2z + 50 - 0{,}1z + 30$.
$S(100) = 0{,}2 \cdot 100 + 50 - 0{,}1 \cdot 100 + 30 = 20 + 50 - 10 + 30 = 70 + 20 = 90$.

Ответ: 90 кг сплава сможет произвести завод за сутки.

9. ***Пример.*** **В январе 2014 года ставка по депозитам в банке «ВТБ» составляла**

x % годовых, тогда как в январе 2015 года — y % годовых, причем известно, что x+y=30%. В январе 2014 года вкладчик открыл счет в банке «ВТБ», положив на него некоторую сумму. В январе 2015 года, попрошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение x при котором сумма на счету вкладчика в январе 2016 года станет максимально возможной.
Решение: Пусть 1-первоначальный вклад. Тогда через год при x % годовых на счету окажется сумма $1\cdot(1+0{,}01x)$. Далее вкладчик снимает со счета пятую часть первоначальной суммы. То есть на счету оказывается сумма $1+0{,}01x-0{,}2=0{,}8+0{,}01x$. В банке меняется процентная ставка и составляет теперь y %, т.е (30-x)%. Тогда еще через год у вкладчика на счету окажется сумма $(0{,}8+0{,}01x)(1{,}3-0{,}01x)$. Нас интересует значение x, при котором значение $f(x) =(0{,}8+0{,}01x)(1{,}3-0{,}01x)$ будет максимальным. Исследуем данную функцию методами математического анализа или максимальное значение функция f(x) примет в точке x_0 (вершина параболы), то есть в точке $x_0 =25$.
Ответ: 25%.

10. ***Пример.*** **Максим хочет взять кредит 1,5 млн. руб. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может взять Максим кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 т.р.?**

Решение: Представим решение данной задачи в виде таблицы.

	Выплаты Максима	Начисление банка	Остаток на конец года
31.12.15			1 500 000
31.12.16	350 000	1500000*10%=150 000	1500000+150000 - 350000 = 1 300 000
31.12.17	350 000	1300000*10% =130 000	1300000+130000 – 350000 = 1 080 000
31.12.18	350 000	1080000*10% =108 000	1080000+108000 – 350000 = 838 000
31.12.19	350 000	838000*10% = 83 800	838000+83800 – 350000 = 571 800
31.12.20	350 000	571800*10% = 57 180	571800+57180 – 350000 = 278 980
31.12.21	306 878	278980*10% =27 898	278980+27898 –306878 = 0

Ответ: Максим может взять кредит на 6 лет.

11. ***Пример.*** **31 декабря 2014 года Максим взял в банке некоторую сумму денег в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами, то есть за 4 года?**

Решение. Пусть S – сумма кредита.

1)В конце первого года долг составит: (1,1x – 2928200) рублей
2) В конце второго года долг (в рублях) составит: (1,1x – 2928200)·1,1 – 2928200 = 1,21x – 3221020 – 2928200 = 1,21x – 6149220
3) В конце третьего года долг (в рублях) составит: (1,21x – 6149220)·1,1 – 2928200 = 1,331x – 6764142 – 2928200 = =1,331x – 9692342
4) В конце четвертого года долг (в рублях) составит 2928200 рублей: (1,331x – 9692342)·1,1 = 2928200; 1,4641x – 10661576 = 2928200; 1,4641x = 13589776; x = 9281999,8
Значит, сумма кредита равна 9282000 рублей.
Ответ: 9282000 руб

12. ***Пример.*** **31 декабря 2014 года Роман взял в банке 8599000 рублей в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга(то есть увеличивает долг на 14%), затем Роман переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Роман выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?**

Решение.
1)В конце первого года долг составит: 8599000·1,14 – X = 9802860 – X
2) В конце второго года долг составит: (9802860 - X)·1,14 – X=11175260 – 2,14·X

3) В конце третьего года долг (в рублях) составит: (11175260 – 2,14·X) ·1,14 – X=12739796 – 3,4396·X.
Составим уравнение: 12739796 – 3,4396·X= 0
X=3703860 рублей
Ответ: ежегодный транш составит 3703860 рублей

Задачи с ответом

1. Первичная информация разделяется по серверам №1и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объеме t^2 Гб входящей в него информации выходит 20t Гб , а сервера №2 при объеме t^2 Гб входящей в него информации выходит 21t Гб обработанной информации.
25≤ $\boldsymbol{t}$ ≤55. Каков наибольший объем выходящей информации при общем объеме входящей информации в 3364 Гб?
Ответ: 1682 Гб.
2. Стоимость изготовления n банок пропорциональна величине $24+4n+n^2$
При каком количестве банок стоимость изготовления одной банки минимальна?
Ответ: 5 банок.
3. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?
Ответ: 5 400 кг сплава сможет произвести завод ежедневно.

4. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?
Ответ: 86 000 рублей сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель.
5. В двух областях есть по 90 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?
Ответ: 165 кг металлов можно добыть в двух областях.

6. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 200ц/га. Урожайность

свеклы на первом поле составляет - 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свеклу - по цене 13 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Ответ: 69 000 000 рублей может получить фермер.

7. В двух областях есть по 250 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности.

Ответ: 300 кг металлов можно добыть в двух областях.

8. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором – 300ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет - 300 ц/га, а на втором – 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5 000 руб. за центнер, а свеклу - по цене 6 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Ответ: 44 000 рублей может получить фермер.

9. В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металла так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Ответ: 240 кг металлов можно добыть в двух областях.

10. На каждом из двух комбинатов работает по 1 800 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 1 детали А или 2 деталь В. На втором комбинате для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, из которых собирают изделие, для изготовления которого нужна 1 деталь А и 1 детали В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях сможет собрать комбинат за смену?

Ответ: 1860 изделий

11. На каждом из двух комбинатов работает по 200 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 1 детали А или 3 деталь В. На втором комбинате для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, из которых собирают изделие, для изготовления которого нужны 1 деталь А и 1 деталь В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях сможет собрать комбинат за смену?

Ответ: 220 изделий.

12. На каждом из двух комбинатов изготавливают детали А и В. На первом комбинате работает 40 человек, и один рабочий изготавливает за смену 15 детали А или 5 деталей В. На втором комбинате работает 160 человек, и один рабочий изготавливает за смену 5 деталей А и 15

деталей В. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, из которых собирают изделие, для изготовления которого нужны 2 детали А и 1 деталь В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях сможет собрать комбинат за смену?
Ответ: 1800 изделий.

13. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 855 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» - 3000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?
Ответ: 63 000 рублей.

Задачи для самостоятельного решения

1. В городе N живёт 600 000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых 45% не работает (пенсионеры, домохозяйки, безработные). Сколько взрослых работает?

2. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 8 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

3. Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 112%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 3%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

4. Фонды оплаты труда четырёх отделов компании соотносятся друг с другом как 2:5:6:3. Определите величину фондов оплаты труда каждого отдела, если суммарный фонд оплаты труда компании равен 64 млн рублей.

5. В целях стимулирования продаж магазин установил 5%-ную скидку на каждую пятую продаваемую посудомоечную машину и 15%-ную на каждую двенадцатую продаваемую посудомоечную машину. В случае если на одну посудомоечную машину выпадают обе скидки, то применяется большая из них. Всего в ходе рекламной акции было продано 500 посудомоечных машин. Определите выручку магазина от продажи партии посудомоечных машин, если цена одной посудомоечной машины составляет 12000 рублей.

6. В январе стоимость проезда в автобусе составила 18 рублей, а в феврале — 20 рублей. На сколько процентов (с точностью до десятых долей процента) повысилась стоимость проезда в феврале?

7. Антикварный магазин, купив два предмета за 450 тысяч рублей, продал их, получив 40% прибыли. Какую цену заплатил магазин за каждый предмет, если на первом прибыли было получено 25%, а на втором 50%?

8. Банк выплачивает своим вкладчикам 6% годовых и даёт ссуды заёмщикам под 15% годовых. Чему равна банковская прибыль за год, если банк привлёк 20 млн рублей средств вкладчиков на год и выдал заёмщикам ссуд в 5 млн рублей на год?

9. Объем промышленной продукции увеличился в 5 раз. На сколько процентов произошло увеличение?

10. После перехода на новое оборудование затраты электроэнергии снизились на 16%, а выпуск изделий вырос на 50%. На сколько процентов уменьшилось количество электроэнергии, расходуемое на производство одного изделия?

11. Цветной телевизор два месяца назад стоил на 20% дешевле, чем месяц назад, когда он стоил на 10% дешевле, чем сейчас. На сколько процентов дешевле стоил телевизор два месяца назад, чем сейчас?

12. Какую сумму положили в банк под простые проценты по ставке 27% годовых, если за 4 года вклад вырос на 167 400 рублей?

13. Известно, что банк начисляет простые проценты по ставке 25% годовых. Определите минимальное число лет, по истечении которых первоначальный вклад увеличится в 2 раза?

14. Определите годовую процентную ставку (банк начисляет простые проценты), если первоначальный вклад величиной 23 500 рублей за 6 лет увеличился на 38 070 рублей?

15. В банк внесен вклад 64 000 рублей на 3 года. Определите ставку процента, если через 3 года на счету вкладчика оказалось 216 000 рублей.

16. Известно, что ставка банковского процента равна 25%. Определит, через сколько лет начальный вклад 216 000 рублей возрастет до 421 875 рублей.

17. Цена некоторого товара снижается ежегодно на 10%. На сколько процентов по сравнению с первоначальной снизится стоимость товара через четыре года?

18. В течение января цена на яблоки выросла на 20%, а в течение февраля — на 30%. На сколько процентов поднялась цена за 2 месяца?

19. Изобретение Иванова даёт экономию 40%, Петрова — 30%, а Сидорова — 20%. Сколько процентов составит общая экономия? (Применение одного изобретения не влияет на эффективность других.)

20. Пётр открыл вклад «Сюрприз» на три года. Договор предусматривает следующую схему начисления процентов: за первый год — 8%, в каждом следующем году ставка повышается на 4 процентных пункта. Определите, на сколько процентов вырастет вклад Петра за три года.

21. По оценкам экспертов цена новой модели сотового телефона снижается за первый год на 15%, за второй — на 10%, за третий — на 5%. Сколько будет стоить через три года сотовый телефон, начальная цена которого равнялась 250 евро?

22. При оплате услуг через платежный терминал взимается комиссия 5%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Аня хочет положить на счет своего мобильного телефона не меньше 300 рублей. Какую минимальную сумму она должна положить в приемное устройство данного терминала.

Муниципальное общебразовательное учреждение
Асекеевская средняя общеобразвательная школа
Асекеевского района Оренбургской области

Экономические задачи в заданиях ЕГЭ по математике

Учитель математики
Решетова Наталья Александровна

2018

Начиная с 2015 года, в заданиях ЕГЭ по математике профильного уровня появилась новая экономическая задача №17. В данных задачах предлагается ознакомиться с разными схемами выплаты кредита банку со стороны заемщика.

Кредит – это ссуда, предоставленная банком заемщику под определенные проценты за пользование деньгами. Существует два вида платежей по кредиту: аннуитетный и дифференцированный.

Кроме задач о кредитах есть задачи на выбор оптимального решения. Эти задачи тесно связаны с практической деятельностью человека. Как добиваться наиболее высокого жизненного уровня, наивысшей производительности труда, наименьших потерь, максимальной прибыли, минимальной затраты времени.

Решение задач о кредитах в настоящее время очень актуально, так как жизнь современного человека тесно связана с экономическими отношениями, в частности, с операциями в банке.

Теоретическая часть

При чтении условий любой задачи можно встретить такие величины как сумма кредита, процентная ставка, периодическая выплата по кредиту, стоимость ценной бумаги и другие. Попробуем в них разобраться.

Прежде всего, нужно разложить условия задачи на последовательные действия. **Очень важен порядок этих действий!**

Например:

1. **Взял кредит – сумма на количество лет.**
2. **Банк начислил проценты**

3. **Внес периодическую плату по кредиту**

Дальше пункты 2 и 3 могут повторяться в зависимости от количества лет.

4. **Внес остаток долга – погасил кредит.**

Теперь нужно математически выразить каждое наше действие, и очень **важно соблюсти порядок, в котором эти действия происходят**.

Задача 1. Клиент в банке взял кредит на срок n месяцев (лет, иной срок). В конце каждого месяца (года, иного срока) общая сумма оставшегося долга увеличивается на p %, затем уменьшается на сумму, уплаченную Клиентом. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца (года, иного срока) подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц (год, иной срок) уменьшалась равномерно, т.е. на одну и ту же величину. Найти…

В других задачах, ежемесячный долг перед банком должен уменьшаться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов.

Задача 2. **Клиент взял кредит в банке на n лет (месяцев) под p %.Схема выплаты кредита: по истечении 1 года (месяца) банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, т.е. увеличивает долг на p %, затем Клиент переводит в банк Ф у.е. Какой должна быть сумма $Ф$, чтобы клиент выплатил долг n равными платежами?**

Построим математическую модель ***задачи 1***.

Пусть сумма кредита S у.е. За n месяцев (лет) Клиент выплачивает ежемесячно (каждый год) банку некоторую сумму, которая имеет две составляющие:

Первая составляющая – фиксированная сумма равная $\frac{S}{n}$ у.е.

Вторая составляющая – выплата процентной ставки, которая равномерно уменьшается (из-за фиксированной, т.е. равномерной, выплаты за каждый месяц (год) в размере $\frac{S}{n}$ у.е .). Эта сумма равна 0,01r, умноженному на сумму оставшегося долга Клиента.

В первый месяц (год) выплаты долга эта составляющая равна 0,01r S у.е.

Во второй месяц (год) - $0{,}01p\,\frac{n-1}{n}\,S$ у.е.

В третий месяц (год) – $0{,}01p\,\frac{n-2}{n}\,S$ у.е.

...

В n - й (последний) месяц (год) – $0{,}01p\,\frac{1}{n}\,S$ у.е.

Таким образом, равномерность уменьшения долга Клиента обусловлена только лишь равномерным уменьшением размера процентной ставки в зависимости от также равномерно уменьшаемого долга Клиента из месяца в месяц (из года в год).

Найдем всю сумму такой составляющей, выплачиваемой Клиентом банку за весь период кредитования.

Но в последнем произведении выражение, заключенное в скобки, есть сумма первых n членов арифметической прогрессии, первый член которой равен 1, а последний член

Итак, вся сумма, выплаченная банку Клиентом за период кредитования (обозначим этот параметр буквой B) выражается формулой:

$$B = S + 0{,}01p\, S\, \frac{n+1}{2}$$

Мы получили расчетную формулу, которая связывает:

сумму кредита S ;

процентную месячную (годовую, иную) ставку p;

срок кредитования n ;

сумму, выплаченную банку Клиентом за вест период кредитования B .

Задача типа 2.

Клиент взял кредит в банке на 3 года под p % годовых. Схема выплаты кредита: по истечении 1 года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, т.е. увеличивает долг на p %, затем Клиент переводит в банк $Ф$ у.е. Какой должна быть сумма $Ф$, чтобы клиент выплатил долг тремя равными платежами?

Пусть Клиент взял кредит S у.е. Для удобства в расчетах введем обозначение

$m = (1 + 0{,}01p)$.

По истечении года банк начислил процентную ставку. Долг стал Sm у.е.

Клиент перевел в банк $Ф$ у.е., после чего долг Клиента стал $Sm - Ф$ у.е.

На начало следующего отчетного года банк вновь начислил процентную ставку. Долг Клиента стал $(Sm - Ф)\ m = Sm^2 - Фm$ у.е. Клиент перевел в банк $Ф$ у.е. Долг уменьшился до $Sm^2 - Фm - Ф$ у.е.

Наступил новый год. Банк очередной раз начислил процентную надбавку. Долг стал $Sm^3 - Фm^2 - Фm$ у.е.

Клиент, заплатив $Ф$ у.е. погасил этот последний долг и рассчитался с банком полностью. Следовательно, имеем уравнение: $Sm^3 - Фm^2 - Фm - Ф$. Решив это уравнение относительно $Ф$ получим $Ф = \frac{Sm^3}{m^2+m+1}$

Конечно же, запоминать эти формулы надобности нет. А рассуждения, могут пригодиться.

В зависимости от того, какая из этих переменных неизвестна, можно выделить типы экономических задач: какую сумму взяли в кредит или сумма выплат по кредиту, на какой минимальный срок взят кредит, под какой процент был взят кредит.

Задача1. 15 - го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1 - го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15 - го числа каждого месяца долг должен на одну и ту же сумму меньше долга на 15 - е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма после полного погашения кредита на 20 % больше суммы, взятой в кредит. Найти *r*.

Пусть первоначальная сумма кредита S, срок *n*=40 месяцев, *r* процентная ставка.

Срок	Кредит	Долг	Выплаты
1	S	$(1+0{,}01r)\cdot S$	$(1+0{,}01r)\cdot S-\frac{38}{39}\cdot S=0{,}01r\cdot S+\frac{1}{39}\cdot S$
2	$\frac{38}{39}\cdot S$	$(1+0{,}01r)\cdot\frac{38}{39}\cdot S$	$(1+0{,}01r)\cdot\frac{38}{39}\cdot S-\frac{37}{39}\cdot S=0{,}01r\cdot\frac{38}{39}\cdot S+\frac{1}{39}\cdot S$
3	$\frac{37}{39}\cdot S$	$(1+0{,}01r)\cdot\frac{37}{39}\cdot S$	$(1+0{,}01r)\cdot\frac{37}{39}\cdot S-\frac{36}{39}\cdot S=0{,}01r\cdot\frac{37}{39}\cdot S+\frac{1}{39}\cdot S$
4	$\frac{36}{39}\cdot S$	$(1+0{,}01r)\cdot\frac{36}{39}\cdot S$	$(1+0{,}01r)\cdot\frac{36}{39}\cdot S-\frac{35}{39}\cdot S=0{,}01r\cdot\frac{36}{39}\cdot S+\frac{1}{39}\cdot S$
....	...	...	....
38	$\frac{2}{39}\cdot S$	$(1+0{,}01r)\cdot\frac{2}{39}\cdot S$	$(1+0{,}01r)\cdot\frac{2}{39}\cdot S-\frac{1}{39}\cdot S=0{,}01r\cdot\frac{2}{39}\cdot S+\frac{1}{39}\cdot S$
39	$\frac{1}{39}\cdot S$	$(1+0{,}01r)\cdot\frac{1}{39}\cdot S$	$0{,}01r\cdot\frac{1}{39}\cdot S+\frac{1}{39}\cdot S$
40	0	0	0

Сумма всех выплат составит:

$$0{,}01r\cdot S+\frac{1}{39}\cdot S+0{,}01r\cdot\frac{38}{39}\cdot S+\frac{1}{39}\cdot S+0{,}01r\cdot\frac{37}{39}\cdot S+\frac{1}{39}\cdot S+\cdots+0{,}01r\cdot\frac{2}{39}\cdot S+\frac{1}{39}\cdot S+0{,}01r\cdot\frac{1}{39}\cdot S+\frac{1}{39}\cdot S=$$

$$=39\cdot\frac{1}{39}\cdot S+0{,}01r\cdot S\cdot\left(1+\frac{38}{39}+\frac{37}{39}+\cdots+\frac{2}{39}+\frac{1}{39}\right)=S+0{,}01r\cdot S\cdot 20=S\cdot(1+0{,}2r)$$

Известно, что общая сумма после полного погашения кредита на 20 % больше суммы, взятой в кредит, тогда $S\cdot(1+0{,}2r)=1{,}2\cdot S,\ 1+0{,}2r=1{,}2,\ r=1$

Задача 2. 31 декабря 2016 года Василий взял в банке 5460000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Василий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Василий выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение: S=5460000 - сумма кредита, x - ежегодная плата, r=20%

При начислении процентов оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент m=1+0,2=1,2.

Год	Долг банку	Остаток после ежегодной выплаты
0	S	-
1	1,2S	1,2S - x
2	1,2(1,2S - x) = 1,44S - 1,2x	1,44S - 1,2x - x= 1,44S - 2,2x

3	1,2(1,44S - 2,2x)=1,728S - 2,64x	1,728S - 2,64x - x= 1,728S - 3,64x

После третьего взноса кредит погашен полностью, значит, остаток равен нулю. Решаем полученное уравнение.

1,728S - 3,64x=0

3,64x=1,728·5460000

x=2592000 Ответ: 2592000 рублей

Задачи на нахождение ежегодной платы (транша).

Задача 1. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4290000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение : S = 4290000 - сумма кредита, r = 14,5%, x - ежегодная выплата

При начислении процентов оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент m=1+0,145=1,145.

Год	Долг банку	Остаток после ежегодной выплаты
0	S	-
1	1,145S	1,145S - x
2	1,145(1,145S - x) = $1,1452^2$S - 1,145x	$1,1452^2$S - 1,145x - x = $1,1452^2$S - 2,145x

После второго взноса кредит погашен полностью, значит, остаток равен нулю. Решаем полученное уравнение: $1,1452^2$S - 2,145x = 0

$$2{,}145X = 4\ 290\ 000 \cdot 1{,}145^2$$

$$X = \frac{4\ 290\ 000 \cdot 1{,}145^2}{2{,}145}$$

$$X = 2\ 622\ 050.$$

Ответ: 2622050 рублей

При решении этих задач можно увидеть закономерность и, оформив решение в общем виде, получаем формулу.

S-сумма кредита,

$m=1+\frac{a}{100\%}$, где a - процентная ставка,

x – сумма ежегодных выплат;

I год: S·p-x

II год: $(Sp - x)p - x = Sp^2 - px - x$

III год: $(Sp^2 - px - x)p - x = Sp^3 - p^2x - px - x$

IV год: $(Sp^3 - p^2x - px - x)p - x = Sp^4 - p^3x - p^2x - px - x$

и т.д.

n – ый год: $Sp^n - p^{n-1}x - p^{n-2}x - \cdots - p^2x - px - x$

Задача 2. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6902000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре месяца)?

Решение. S = 6902000 - сумма кредита, r=12,5%, x - ежегодная выплата

Применяем формулу: $Sm^4 - m^3x - mp^2x - mx - x$, где

S-сумма кредита,

m=$1 + \frac{r}{100\%}$, где r- процентная ставка,

x – сумма ежемесячных выплат;

$m = 1 + \frac{a}{100}$; $m = 1{,}125$

$$6\,902\,000 \cdot 1{,}125^4 - 1{,}125^3x - 1{,}125^2x - 1{,}125x - x = 0$$

$$6\,902\,000 \cdot 1{,}125^4 - x(1{,}125^3 + 1{,}125^2 + 1{,}125 + 1) = 0$$

$$x = \frac{6\,902\,000 \cdot 1{,}125^4}{1{,}125^3 + 1{,}125^2 + 1{,}125 + 1}$$

$$x = 2296350$$

Ответ: 2 296 350 рублей.

Задачи на нахождение суммы кредита.

Задача 1. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15 числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 1370тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение: Пусть начальная сумма кредита равна S. По условию, ежемесячный долг перед банком должен уменьшаться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов.

$\frac{24S}{24}$; $\frac{23S}{24}$; $\frac{22S}{24}$; …; $\frac{S}{24}$. - размеры долгов (остаток по кредиту на конец месяца), тогда ежемесячная выплата процентов выглядит следующим образом:

$\frac{2}{100}S$; $\frac{2}{100} \cdot \frac{23S}{24}$; $\frac{2}{100} \cdot \frac{22S}{24}$; $\frac{2}{100} \cdot \frac{21S}{24}$; ...; $\frac{2}{100} \cdot \frac{S}{24}$ - ежемесячный %

Находим размеры выплат:

1-й месяц: $\frac{S}{24} + \frac{2}{100}S = \frac{148}{2400}S$

2-й месяц: $\frac{S}{24} + \frac{2}{100} \cdot \frac{23S}{24}S = \frac{146}{2400}S$

3-й месяц: $\frac{S}{24} + \frac{2}{100} \cdot \frac{22S}{24}S = \frac{144}{2400}S$ и.т.д .

Замечаем, что получили арифметическую прогрессию, разность которой равна 2. Тогда используя формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$ при $a_1=148$, $d= -2$

находим 12-й месяц: $a_{12} = 148 - 2(11 - 1) = 126$, т.е. $\frac{126}{2400}S$.

Так как нам известна сумма первых двенадцати месяцев составляем уравнение:

$$\frac{148}{2400}S + \frac{146}{2400}S + \frac{144}{2400}S + \cdots + \frac{126}{2400}S = 1370000$$

Вынесем за скобки общий множитель и воспользуемся формулой суммы членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}$

$$\frac{S}{2400}(148 + 146 + 144 + \cdots + 126) = 1370000$$

$$S = \frac{1370000 \cdot 2400}{1644} = 2000000 \qquad \text{Ответ: } 2000000$$

Задача 2. 31 декабря 2014 года Василий взял в банке некоторую сумму кредит под 11% годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 11%), затем переводит в банк 3696300 рублей. Какую сумму взял Василий в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение: Воспользуемся формулой: $Sm^2 - mx - x = 0$, которую вывели при решении задач на нахождение ежегодной (ежемесячной) выплаты,

где $m = 1+0{,}11=1{,}11$, $x = 3696300$

$Sm^2 - x(m + 1) = 0 \rightarrow S = \frac{x(m+1)}{p^2} = \frac{3696300 \cdot 2{,}11}{1{,}2321} = 6330000.$

Ответ: 6330000рублей

Задача 3. 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что восьмая выплата составила 99,2 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования.

Решение: S - сумма кредита, r = 3%

Сперва нужно вычислить сумму кредита. Известно, что восьмая выплата = 99,2тыс. Находим размеры выплат:

1-й месяц: $\frac{S}{15} + \frac{3}{100}S = \frac{145}{1500}S$

2-й месяц: $\frac{S}{15} + \frac{3}{100} \cdot \frac{14S}{15}S = \frac{142}{1500}S$

3-й месяц: $\frac{S}{15} + \frac{3}{100} \cdot \frac{13}{15}S = \frac{139}{1500}S$

....

8-й месяц: $\frac{124}{1500}S \rightarrow \frac{124}{1500}S = 99200 \rightarrow S = 99200 \cdot \frac{1500}{124} = 1200000$, то есть планируется взять в кредит 1200000рублей.

Теперь, чтобы найти сумму которую нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования воспользуемся формулой суммы членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}$. Для этого сперва найдем пятнадцатую выплату:

$a_{15} = 145 - 3\cdot 14 = 103$, т.е. $\frac{103}{1500}$

Общая сумма равна: $\frac{145}{1500}S + \frac{142}{1500}S + \ldots + \frac{103}{1500}S$

$S_{15} = \frac{2\cdot 145 - 3\cdot 14}{2} \cdot 15 = 1860$, т.е. $\frac{1860S}{1500} = \frac{1860\cdot 1200000}{1500} = 1488000$

Ответ: 1488000

Задача 4. В июле 2020 года планируется брать кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года), и сумма платежей превосходит взятую в банке сумму на 156060 рублей?

Решение.

Пусть *x* руб. – искомая сумма кредита, *y* руб. – величина ежегодного платежа, *r%* – процентная ставка по кредиту.

В конце первого года долг составит: $rx - y$.

В конце второго года долг составит: $r(rx - y) - y$.

В конце третьего года долг составит: $r(r(rx - y) - y) - y = 0$.

По условию, $3y - x = 156060$. Получим уравнение

$$\frac{r^3 x}{r^2 + r + 1} = \frac{156060 + x}{3}, \qquad x = 239400.$$

Ответ: 239400.

Задачи на вычисление процентной ставки.

Задача 1. 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 15% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r?

Решение. Пусть S сумма кредита равна. Долг перед банком должен уменьшаться до нуля равномерно. Тогда последовательность размеров долга будет иметь вид:

$\frac{9S}{9}; \frac{8S}{9}; \frac{7S}{9}; \ldots \frac{S}{9}.$ **- остаток по кредиту на конец месяца**

Найдем выплаты:

1 месяц: $\frac{S}{9} + \frac{r}{100}S = \frac{(100+9r)S}{900}$

2 месяц: $\frac{S}{9} + \frac{r}{100}\frac{8S}{9} = \frac{(100+8r)S}{900}$

……

9 месяц: $\frac{(100+r)}{900}S$

Найдем сумму всех выплат. По условию общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит, значит: $\frac{(900+45r)S}{900} = 1,15S$ **→ 900 + 45r = 1035 → r = 3. Ответ: 3%**

Задача 2**. 31 декабря 2014 года Евгений взял в банке 1млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на r%), затем Евгений переводит очередной транш. Евгений выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 540тыс. рублей, во второй 649,6 тыс. рублей. Найдите r?**

Решение: S = 1000000, r - процентная ставка по кредиту.

В конце 1-го года долг составит:

$\frac{100+r}{100} \cdot 1000000 - 540000 = 460000 + 10000a$

В конце 2-го года:

$\frac{100+r}{100} \cdot (460000 + 10000r) - 649600 = 100r^2 + 14600r - 189600$

По условию, кредит будет погашен за два года, составляем уравнение:

$100r^2 + 14600r - 189600 = 0$, сокращая на 100 получим

$r^2 + 146r - 1896 = 0$.

$D = 146^2 + 4 \cdot 1896 = 21316 + 7584 = 28900 = 170^2$

$r_1 = \frac{-146+170}{2} = 12$, $r_2 = \frac{-146-170}{2} = -158$.

Ответ: 12%

Задача 3**. 15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:**

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

Решение: S - сумма кредита r =5%

выплата за 1-й месяц: $\frac{S}{5} + \frac{5}{100} \cdot S = \frac{125S}{500}$

2-й: $\frac{S}{5} + \frac{5}{100} \cdot \frac{4S}{5} = \frac{120S}{500}$

3-й: $\frac{115S}{500}$; 4-й: $\frac{110S}{500}$; 5-й: $\frac{105S}{500}$.

Таким образом, за все 5 месяцев сумма выплат составит:

$$\frac{125 + 120 + 115 + 110 + 105}{500} S = \frac{575}{500} S = \frac{115}{100} S = 1,15S$$

Из выражения видно, что первоначальная сумма кредита увеличилась на 1,15 раз, т.е. на 115%.

Ответ: 115%

Задача 4**. 15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1млн. рублей. Условия его возврата таковы:**

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r - целое число.

-со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	**15.01**	**15.02**	**15.03**	**15.04**	**15.05**	**15.06**	**15.07**
Долг (в млн рублей)	**1**	**0,6**	**0,4**	**0,3**	**0,2**	**0,1**	**0**

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2млн рублей.

Решение: Составим ежемесячные выплаты

01.02. - $(1 + \frac{r}{100}) \cdot 1$ - 0,6

01.03. - $(1 + \frac{r}{100}) \cdot 0,6$ - 0,4

01.04 - $(1 + \frac{r}{100})\cdot 0{,}4 - 0{,}3$

01.05 - $(1 + \frac{r}{100})\cdot 0{,}3 - 0{,}2$

01.06 - $(1 + \frac{r}{100})\cdot 0{,}2 - 0{,}1$

01.07 - $(1 + \frac{r}{100})\cdot 0{,}1 - 0$.

Найдем общую сумму выплат:

$(1 + \frac{r}{100})\cdot(1 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) - (0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) =$

$= (1 + \frac{r}{100})\cdot 2{,}6 - 1{,}6 = \frac{2{,}6r}{100} + 1$

По условию: $\frac{2{,}6r}{100} + 1 < 1{,}2$

$\frac{2{,}6r}{100} < 0{,}2$, $r < \frac{100}{13}$ $r < \mathbf{7}\frac{9}{13}$, т.е. ежемесячно долг возрастал на 7%

Ответ: 7%

Задача 5. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017,2018,2019 годов долг остается равным 4,2 млн рубле
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если долг выплачен полностью и общие выплаты равны 6,1 млн рублей.

Решение. Сумма выплат за первые три года равна:

$4{,}2\cdot 0{,}01\cdot r\cdot 3 = 0{,}126\cdot r$

Сумма выплат за последние два года равна $2\cdot X$.

Так как общие выплаты равны 6,1 млн рублей, то составляем уравнение:

$0{,}126\cdot r + 2X = 6{,}1$ (1).

В январе 2020 года долг составит: $4{,}2 + 4{,}2\cdot 0{,}01r = 4{,}2\ (1+0{,}01r)$. После выплаты суммы X долг станет равным:

$4{,}2\ (1+0{,}01r) - X = 4{,}2t - X$, где $t=1+ 0{,}01r$.

В январе 2021 года долг составит $(4{,}2t - X)\cdot t$. После выплаты суммы X долг станет равным нулю:

$(4{,}2t - X)\cdot t - X = 0$ (2).

Из уравнения (2) выразим X:

$X = \frac{4{,}2\cdot t^2}{1+t}$ и подставим в равенство (1):

$12{,}6\cdot(t - 1) + 2\cdot \frac{4{,}2\cdot t^2}{1+t} = 6{,}1$;

$t = 1{,}1$. Значит, $r = 10\%$

Ответ: 10%

Задача 6. Лев взял кредит в банке на срок 40 месяцев. По договору Лев должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется p% этой суммы, затем следует платеж Льва.

а) Ежемесячные выплаты подбираются, таким образом, чтобы долг уменьшался равномерно.

б) Известно, что наибольший платеж Льва был в 25 раз меньше первоначальной суммы долга. Найдите p.

Решение: S - сумма кредита, r - процентная ставка.

Ежемесячный долг перед банком должен уменьшаться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов.

Выплата в 1-й месяц: $\frac{S}{40} + \frac{r}{100}\cdot S$ **и так как он будет наибольшим составим уравнение:** $\left(\frac{S}{40} + \frac{r}{100}\cdot S\right)\cdot 25 = S \quad \rightarrow \quad \frac{5}{8} + \frac{1}{4}r = 1, \quad r = 1{,}5$

Ответ: 1,5%

Задачи на нахождение количества лет выплаты кредита.

Задача 1**. В июле Федор планирует взять в кредит 1,1 млн. рублей. Условия его возврата таковы:**

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года Федор должен выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное минимальное количество лет Федор может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 300тысяч рублей?

Решение:

1) В конце первого года долг составит:

$1100000\cdot 1{,}1 - 300000 = 910000$

2) В конце второго года долг составит:

$910000\cdot 1{,}1 - 300000 = 701000$

3) В конце третьего года долг составит:

$701000\cdot 1{,}1 - 300000 = 471000$

4) В конце четвертого года долг составит:

$471000\cdot 1{,}1 - 300000 = 218210$

5) В конце пятого года долг составит:

218210·1,1 - 300000 < 0 , т.е. кредит будет погашен за 5 лет.

Ответ: 5 лет

Задачи на оптимизацию.

Задача 1. **У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400ц/га, а на втором - 300ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300ц/га, а на втором - 400ц/га.**

Фермер может продавать картофель по цене 5000руб. за центнер, а свеклу - по цене 6000руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение: Посчитаем доход фермера с 1-го поля:

1) если засеет на нем картофель, урожайность - 400ц/га, 1ц = 5000рублей

с 10 га он соберет 400ц/га·10га = 4000ц тогда доход:

4000·5000= 20000000рб = 20млн.

2) если засеет свеклу, урожайность - 300ц/га, 1ц = 6000 рублей

с 10 га он соберет 300·10=3000ц, тогда доход:

3000·6000 = 18000000рублей = 18млн.

Теперь посчитаем доход фермера со 2-го поля:

1) если засеет картофель, урожайность - 300ц/га

с 10 га он соберет 300·10 = 3000 ц, тогда доход

3000·5000 = 15000000 рублей = 15млн

2) если засеет свеклу, урожайность свеклы - 400ц/га

с 10 га он соберет 400·10 = 4000ц, доход будет равен:

4000·6000 = 24000000рублей = 24млн

Отсюда видно, что максимально возможный доход:

20млн + 24млн = 44млн. Ответ: 44млн.

Задача 2 **Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27**

квадратных метров и номера "люкс" площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер "люкс" - 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег может заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

Решение:

Найдем стоимость 1м² стандартного номера = 2000:27=$74\frac{2}{27}$ руб.

Найдем стоимость 1м² номера "люкс" =4000:45=$88\frac{40}{45}$ =$88\frac{8}{9}$руб.

Так как стоимость 1м^2 номера "люкс" дороже, то выгоднее разместить на этой площади больше номеров "люкс", и как можно меньше номеров стандартных. Начнем перебор количества номеров стандартных с наименьшей цифры.

Пусть стандартных номеров будет:

- 0, тогда 981:45≠ (нацело не делится), далее
- 1, тогда 981 - 27 = 954, 954:45≠ также нацело не делится, далее
- 2,тогда 981 - 54 = 927, 927:45≠ также не делится, идем далее
- 3,тогда 981 - 81 = 900, 900:45=20 - номеров "люкс"

Тогда в сутки отель может заработать:

20·4000+3·2000=80000+6000=86000 Ответ:86000

Задача 3**. В двух областях есть по 250 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0.2 кг. алюминия или 0.1 кг. никеля. Во второй области для добычи x кг. алюминия в день требуется y² человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий или никель, причем 1 кг. алюминия можно заменить 1 кг. никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?**

Решение: 1). В 1 области работают 250 рабочих, каждый работает по 5ч в сутки. За один час один рабочий добывает 0,2кг алюминия, или 0,1кг никеля, т.е в сутки могут добыть:

250·5·0.2= 250 кг. алюминия или

250·5·0,1=125 кг. никеля. Отсюда видно, что выгоднее будет, если все будут добывать алюминий.

2) Во второй области также работают 250 человек, также работают по 5ч в сутки. Для добычи x кг алюминия требуется x^2 человеко-часов, а для добычи y кг никеля требуется y^2 человеко-часов, т.е 250 рабочих нужно разделить таким способом, чтобы извлекался корень

$\sqrt{125 \cdot 5}=\sqrt{625}$=25 кг.(никель) $\sqrt{125 \cdot 5}=\sqrt{625}$=25 кг.(алюминий)

250+25+25=300 кг.

Ответ: 300кг

Задача 4**. В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3кг алюминия или 0,1кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый метал на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?**

Решение: Решение начнем со второй области

100 рабочих нужно разбить так, чтобы извлекался корень, т.е

$\sqrt{10 \cdot 10}=\sqrt{100}$ = 10кг алюминия

$\sqrt{90 \cdot 10}=\sqrt{900}$ = 30кг никеля

Теперь 1 область: пусть x - число рабочих добывающих алюминий,

тогда 100-x число рабочих добывающих никель.

$x \cdot 10 \cdot 0{,}3 = 3x$ - кг алюминия

$(100 - x) \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 100 - x$ -кг никеля.

Составим уравнение учитывая, что на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля: $10 + 3x = 2(30+100 - x)$, $10 + 3x = 260 - 2x$ $5x = 250$, $x = 50$ - рабочих на добычу алюминия, следовательно 50 рабочих на добычу никеля

$50 \cdot 10 \cdot 0{,}3 = 150$ кг алюминия

$50 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 50$ кг никеля.

Тогда 150 + 50 + 10 + 30 = 240кг

Ответ: 240кг.

Задача 5**. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день.**

При этом один рабочий за час добывает 1кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение: Так как в 1-й шахте добывают больше никеля, то для наибольшей выгоды нужно, чтобы все рабочие добывали никель. Тогда

$100 \cdot 5 \cdot 3 = 1500$кг никеля будет добыто в 1-й шахте.

Пусть все 300 рабочих второй вахты добывают алюминий, тогда

$300 \cdot 5 \cdot 3 = 4500$кг алюминия будет добыто.

Так как для сплава нужно 2 раза больше алюминия, то рабочих второй шахты нужно распределить на добычу алюминия и никеля с учетом пропорции сплава.

Пусть x - число рабочих добывающих алюминий,

$300 - x$ - число рабочих добывающих никель.

$x \cdot 5 \cdot 3 = 15x$ (кг) - алюминий

$(300 - x) \cdot 5 \cdot 1 = 1500 - 5x$ (кг) - никель

Составляем уравнение: $15x = 2(1500 - 5x + 1500)$

$$15x = 6000 - 10x$$

$25x = 6000$, $x = 240$ - количество рабочих добывающих алюминий, следовательно 60 рабочих добывают никель.

$240 \cdot 5 \cdot 3 = 3600$кг - алюминий

$60 \cdot 5 \cdot 1 = 300$кг - никель

Тогда $3600 + 300 + 1500 = 5400$ кг. Ответ: 5400кг.

Задача 6**. Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.**

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, - 200 рублей.

Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение: Пусть x - единиц товара 1-го завода,

y - единиц товара 2-го завода.

Тогда, $x + y = 70$, $\rightarrow x = 70 - y$

$500x^2 + 200y^2 = S$

$500(700 - y)^2 + 200y^2 = S$

$700y^2 - 70000y + 2450000 = S$

$700y^2 - 70000y + 2450000$ - квадратный трехчлен примет наименьшее значение при $y = \frac{70000}{2 \cdot 700} = 50$

Тогда $S = 700 \cdot 50^2 - 70000 \cdot 50 + 2450000 = 700000$

Ответ: 700000

Задача 7. **Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.**

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, - 200 рублей.

Антон готов выделять 900000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение: пусть x - на оплату труда рабочих 1-го завода, следовательно,

900000 - x - на оплату труда рабочих 2-го завода.

$\frac{x}{250}$ - часов работы 1-го завода

$\frac{900000-x}{200}$ - часов работы 2-го завода

Количество произведенного товара за неделю $= \sqrt{\frac{x}{250}} + \sqrt{\frac{900000-x}{200}}$ и нужно

найти наибольшее значение этого выражения, для этого найдем производную и найдем нули.

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{250}}}\cdot\frac{1}{250}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{900000-x}{200}}}\cdot\left(-\frac{1}{200}\right)=\frac{2\sqrt{10}\sqrt{900000-x}-5\sqrt{2}\sqrt{x}}{200\sqrt{x}\sqrt{900000-x}}$$

Решаем уравнение $\frac{2\sqrt{10}\sqrt{900000-x}-5\sqrt{2}\sqrt{x}}{200\sqrt{x}\sqrt{900000-x}}=0$

$2\sqrt{10}\sqrt{900000-x}-5\sqrt{2}\sqrt{x}=0$, $2\sqrt{10}\sqrt{900000-x}=5\sqrt{2}\sqrt{x}$, возводив в квадрат с двух сторон получим: 40(900000-x) = 50x, x = 400000.

$\sqrt{\frac{400000}{250}}=\sqrt{1600}=40$ - единиц товара 1 завод

$\sqrt{\frac{900000-400000}{200}}=\sqrt{2500}=50$ - единиц товара 2 завод

40+50=90 единиц. Ответ: 90.

Разные задачи

Задача 1**. 15 января планируется взять в кредит в банке на сумму 2,4млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:**

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Какую сумму нужно выплатить банку за последние 12 месяцев?

Решение: S = 2400000. По условию, ежемесячный долг перед банком должен уменьшаться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов.

$\frac{24S}{24}$; $\frac{23S}{24}$; $\frac{22S}{24}$; …; $\frac{S}{24}$. - размеры долгов (остаток по кредиту на конец месяца), тогда ежемесячная выплата процентов выглядит следующим образом:

$\frac{2}{100}S$; $\frac{2}{100}\cdot\frac{23S}{24}$; $\frac{2}{100}\cdot\frac{22S}{24}$; $\frac{2}{100}\cdot\frac{21S}{24}$; ...; $\frac{2}{100}\cdot\frac{S}{24}$ - ежемесячный %

Находим размеры выплат:

1-й месяц: $\frac{S}{24}+\frac{2}{100}S=\frac{148}{2400}S$

2-й месяц: $\frac{S}{24}+\frac{2}{100}\cdot\frac{23S}{24}S=\frac{146}{2400}S$

3-й месяц: $\frac{S}{24}+\frac{2}{100}\cdot\frac{22S}{24}S=\frac{144}{2400}S$ и.т.д . Замечаем, что выходит последовательность, которая уменьшается на 2. Тогда используя формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$ при a_1=148, d= -2

находим 13-й месяц: a_{13} = 148 - 2(13 - 1) = 126, т.е. $\frac{124}{2400}S$ и

24-й месяц: a_{24} = 148 - 2(24 - 1) = 102S, т.е. $\frac{102}{2400}S$

Выплата за последние 12 месяцев: $\frac{124}{2400}S$+ ...+ $\frac{102}{2400}S$

Вынесем за скобки общий множитель и воспользуемся формулой суммы членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$

$S_{12}= \frac{2\cdot124-2\cdot11}{2}\cdot 12 = 1356.$

$\frac{S}{2400}(124+\cdots+102) == \frac{1356\cdot S}{2400} = \frac{1356\cdot2400000}{2400} = 1356000$

Ответ: 1356000рублей

Задача 2**. В начале 2001 года Алексей приобрел ценную бумагу за 19000руб. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 3000 руб. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?**

Решение: Продать ценную бумагу нужно в тот момент, когда 10% от стоимости станут составлять не меньше 3000 рублей, что возможно при стоимости бумаги не менее 30000 рублей. это произойдет через (19+3+3+3+3=31) четыре года. И в этот момент 10% от стоимости этой бумаги будут равны 3100 рублей, т.е. больше чем, 3000 рублей. Т.е. надо продать бумагу и положить счет в банке. 2001 + 4 = 2005.

Ответ: 2005 году

2 способ решения: $a_n = a_1+(n-1)d$, $a=19000$

$d=3000$

Ему будет выгодно отдать деньги в банк в том случае, если 10% от a_n превышает d , т.е :

$0{,}1\ a_n > 3000$

$0{,}1(19000+3000(n-1)) > 3000\ \ :0{,}1$

$19000+3000n-3000 > 30000$

$3000n > 14000$

$n > \frac{14000}{3000} = 4\frac{2}{3}$

n=5 т.е бумагу можно продать в течении пятого года(сразу после 4-х лет)

Ответ:2005

Задача 3. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн. рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 20 млн. рублей.

Решение:

Пусть первоначальный вклад составляет S млн. руб., тогда:

В конце первого года на вкладе будет 1,1 S млн. руб.,

В конце второго года на вкладе будет 1,1 S·1,1=1,21 S млн .руб.,

В конце третьего года на вкладе будет (1,21 S+3)·1,1=1,331 S+3,3 млн. руб.,

В конце четвертого года на вкладе будет (1,331 S+3,3+3)·1,1=1,4641S+6,93 млн. руб.,

Далее необходимо решить неравенство:

1,4641S+6,93 > 20

1,4641S > 20-6,93

1,4641S > 13,07

S > 13,07:1,4641

S > 8,93

S = 9 млн.руб. так как по условию S — целое число.

Сделаем проверку:

В конце первого года на вкладе будет 1,1·9 = 9,9млн. руб.,

В конце второго года на вкладе будет 9,9·1,1 = 10,89 млн. руб.,

В конце третьего года на вкладе будет (10,89+3)·1,1 = 15,279 млн. руб.,

В конце четвертого года на вкладе будет (15,279+3)·1,1 = 20,1069 млн. руб.

Задача 4. В мае 2017 года планируется взять кредит в банке на 6 лет в размере S млн. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый декабрь каждого года долг возрастает на 10%;
- с января по апрель каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в мае 2018, 2019 и 2020 годов долг остается равным S млн. рублей;
- выплаты в 2021, 2022 и 2023 годах равны между собой;
- к маю 2023 года долг будет выплачен полностью.

Найдите наибольшее целое S, при котором общая сумма выплат не превысит 13млн. рублей.

Решение: Сумма выплат за первые три года: 0,1S·3 = 0,3S

Сумма выплат за последние три года: 3·x = 3x

По условию сумма выплат не превысит 13 млн: $0{,}3S + 3x \le 13$ (1)

За последние три года долг станет равным нулю, т.е.

$Sp^3 - p^2x - px - x = 0$, $p=1{,}1$

$S\cdot 1{,}1^3 - 1{,}1^2x - 1{,}1x - x = 0$

$1{,}331S - 1{,}21x - 1{,}1x - x = 0$

$x = \frac{1{,}331S}{3{,}31}$ Полученное выражение подставим в (1)

$0{,}3S + 3\cdot\frac{1{,}331S}{3{,}31} \le 13$

$S(0{,}3 + \frac{3{,}993}{3{,}31}) \leq 13$, $S \leq 8{,}63$ Ответ: 8 млн.

<u>Задача 4</u>. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $\boldsymbol{t^2}$ часов в неделю, то за эту неделю они производят 2t единиц товара, если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $\boldsymbol{t^2}$ часов в неделю, то за эту неделю они производят 5t единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

<u>Решение:</u> Пусть количество единиц товара, произведённого на первом заводе 2x, а на втором заводе 5y. ($x \geq 0$; $y \geq 0$)Тогда за неделю нужно произвести 580 единиц товара или $2x + 5y = 580$. За каждый час работы Владимир платит рабочему 500 рублей, тогда составим функцию $S = 500 \cdot (x^2 + y^2)$и исследуем её на наименьшее значение.

Выразим из первого уравнения y через x: $y = 116 - 0{,}4x$

$S(x) = 500(x^2 + (116 - 0{,}4x)^2)$, $S'(x) = 1000x - 400(116 - 0{,}4x)$, $10x - 4(116 - 0{,}4x) = 0$,

$10x - 464 + 1{,}6x = 0$, $11{,}6x = 464$, <u>$x = 40$ - точка минимума.</u>

$$S(40) = 500 \cdot (1600 + (116 - 0{,}4 \cdot 40)^2) = 500 \cdot (1600 + 10000) = 5\,800\,000.$$

Ответ 5800 000

Задача 5.Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно $\boldsymbol{t^2}$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, платит 200 рублей. Антон готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Ответ 90

ЗАДАНИЕ № 17.

Содержание критерия	**Баллы.**
Обоснованно получен верный ответ.	**3**

Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки **ИЛИ** получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	**2**
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	**1**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	**0**

Тренажеры

Математический тренажер Действия с десятичными дробями

ВАРИАНТ 1	
1	15,3 * 5,4 - 4,2* (5,12 – 4,912) + 16,0036
2	9,84 - 16,32 * (8 – 7,45) + 2,186
3	(2,12 + 1,07) * (2,12 – 1,07)
4	86,4 * (17,01 : 4,2) : 6,4
5	42,26 – 34,68 : (33,32 : 9,8)
6	40 – (7,12 + 11,043 : 2,7)
7	12,6 : (2,04 + 4,26) – 0,564
8	7,371 : (5 – 3,18) + 2,05 *(17,82 – 7)
9	(5,2 : 26 + 26 : 5,2) *6,1 + 5,25 : 5
10	27,5967 : (8 – 1,186) + 3,02
11	(20 – 13,7) * 7,4 + 18 : 0,6
12	(4,694 - 3,998) : 4,35 + (4,5 * 5,4 – 0,06)
13	(4,6 * 3,5 + 15,32) : 31,42 + (7,26 – 5,78) : 0,148
14	(101,96 – 6,8 * 7,2) : 4,24 – 3,4 * (10 – 6,35)
15	7,72 * 2,25 – 4,06 : (0,824 + 1,176) – 12,423
16	51,328 : 6, 4 + 3,2 * (10 – 4,7) * 2,05
17	(42,12 * 0,12 + 112,016* 0,1) : 1,6 – 9,424

18	((4,2 *0,81 – 6,8*0,05) : 0,5)) : 200
19	2,6* (4,4312 + 15,5688) – 6,66 : (8,2 – 6,72)
20	(0,624 : 4,16 + 6,867 : 2,18) *2,08 – 4,664
21	4260 + 42,6 : (62,06 + 37,94) – 42,6 : (52,44 - 52,43)
22	5 : 0,25 + 0,6 *(9,275 – 4,275) : 0,1
23	3,1 : 100 + (6 – 0,3 : 100) *10
24	0,415 +(2,85 : 0,6*3,2 – 2,72 : 8) + 5,134 : 0,17
25	0,1: 0,002 – 0,5*(7,91 : 0,565 – 11,1 :1,48)
26	0,2 : 0,004 + (7,91 : 0,565 – 44,4 : 5,92) *0,5
27	4,735 : 0,5 + 14,95 : 1,3 + 2,121 : 0,7
28	(0,1955 + 0,187) : 0,085
29	(86,9 + 667,6) : (37,1 + 13,2)
30	(0,008 + 0,992) * (5 *0,6 – 1,4)

Математический тренажер Действия с десятичными дробями

ВАРИАНТ 2	
1	(130,2 – 30,8) : 2,8 - 21,84
2	3,712 : (7 – 3,8) + 1,3* (2,74 + 0,66)
3	(3,4 : 1,7 + 0,57 : 1,9)* 4,9 + 0,0825 : 2,75
4	10,79 : 8,3*0,7 - 0,46 * 3,15 : 6,9
5	(21,2544 : 0,9 + 1,02 * 3,2) : 5,6
6	4,36 : (3,15 + 2,3) + (0,792 – 0,78) * 350
7	(3,91 : 2,3 * 5,4 – 4,03) * 2,4
8	6,93 : (0,028 + 0,36 * 4,2) - 3,5
9	42,165 – 22,165 : (0,61 + 3,42)
10	((4 : 0,128 + 14628,25) : 1,011* 0,00008 + 6,84) : 12,5
11	687,8 + (88,0802 – 85,3712) : 0,045
12	(3,1 * 5,3 – 14,39) : 1,7 + 0,8
13	(3,8 * 1,75 : 0,95 – 1,02) : 2,3 + 0,4
14	((23,79 : 7,8 – 6,8 : 17) * 3,04 – 2,04) * 0,85
15	0,15 : 0,01 + (6 + 9,728 : 3,2) * 2,5 – 1,4
16	1,44 : 3,6 + 0,8 + 3,6 : 1,44* (0,1 - 0,02)
17	3,45 * (11,2 + 75,6) – 0,93 * 1,26

18	4,25 : 0,25 – 0,06 * 82 + 0,4
19	(0,237 + 45,6) * 12,01 - 11,1* (237,1 – 229,9)
20	5,8 – 0,27 * 3,6 + 5,172
21	12 – 5,3 : (19,6 : 0,35 - 0,06 * 50)
22	(0,6 + 0,25 – 0,125) * 3,2 + 4,5 : 100
23	(15,5 : 0,25 – 0,08 * 200) : 2,3 – 1,3
24	(87,05 * 2,7 – 55,68 :32) * 0,8 : 0,02
25	522,348 : 87 + 2,7 * (0,84 – 0,128 : 0,16)
26	6400 * 0,0145 – (1272,6 : 0,42 – 3000)
27	(0,7 : 1,4 – 0,02) : 0,012 + 1,6 * (0,548 – 0,023)
28	(1,184 : 3,2 + 0,832 : 0,4) : 0,5 + 1,5
29	4,96 ; 10 + 35,8 : 100 - 0,0042
30	(0,04 + 3,59) * (7,35 + 2,65) : 300

Математический тренажер

Действия с десятичными дробями

ВАРИАНТ 3	
1	2,5 + 0,56* 28 + 0,125*15 – 0,12*7
2	12,8 : 4 + 76,8 : 12 – 42,6 : 6 – 2,4
3	4,01 + 43,6 : 10 – 73,2 : 30 + 15,4 : 100
4	176,4 : 100 – 0,041*40 + 13,5 :50 +0,3
5	(16,4 + 13,2)*3 – (10,6 + 4,8) *2 – 23,2
6	(40,65 - 32,6) : 5 + (4,72 _ 2,24)*3
7	4,735 : 0,5 + 14,95 : 1,3 + 2,121 : 0,7 – 21,6
8	0,01105 + 0,05 - 0,3417 : 34 -_ 0,875 : 125
9	(5,72 – 3,21)*5 + (86,9 + 667,6) : (37,1 + 13,2)
10	(0,1955 + 0,187) : 0,085 – (4,72 – 4,72)*0,157
11	4,9 – (0,008 + 0,992) * (5 *0,6 – 1,4)
12	(50000 – 1397,3) : (20,4 + 33,603) – 856
13	3,7 *0,18 + 35,9 *0,26 – 0,109 *91
14	34,98 : 6,6 + 5,141 : 0,53 – 0,8379 : 0,057
15	0,131 *470 + 26,97 : 2,9 - 50,4 *1,4
16	0,439 *97 – 182,75 : 4,3 + 31,9 *0,43

17	(20,4 – 18,23)* 4,3 + (0,40713 + 0,44176) : 0,67
18	(0,357 + 7,043)*0,85 + (52 – 1,928) : 5,69
19	(1,5 - 0,4732)* 35 – (0,6092 + 0,0718) : 0,75
20	(139,4 + 16,6)* 0,039 - (20 – 17,54) : 2,5
21	4,1819 + 0,73 *(5,375 + 2,595)
22	5,0143 – 65,9*(0,0612 + 0,0058)
23	(0,83 *3,7 + 9,741 :51 – 0,012) : 0,325
24	(67,21 : 0,143 – 0,546*850 + 2,1) : 1,25
25	(79* 0,63 – 9,558 : 5,4 – 26,94) : 0,324
26	(11,328 : 16 + 7,752 : 7,6) : 0,16
27	13,7 – (0,53 *6,7 + 1,77*3,1 + 0,004) : 0,66
28	5,3 : (2,87* 0,53 – 0,043 *7,7 – 0,19)
29	(3,06 – 2,97) * (5,6*0,93 – 0,84*6,2)
30	(5,4*0,77 – 0,008) : (2,747 : 0,67+ 0,05)

Математический тренажер

Действия с десятичными дробями

ВАРИАНТ 4	
1	589,72 :16 – 18,305 :7 + 5,67 : 4
2	(86,9 + 667,6) : (37,1 +13,2)
3	(0,93 + 0,07) : (0,93 – 0,805)
4	1,35 : 2,7 + 6,02 – 5,9 + 0,4 : 2,5 *(4,2 – 1,075)
5	((14,068 + 15,78) : (1,875 + 0,175)) : (0,325+ 0,195)
6	(0,578 + 0,172)* (0,823 + 0,117) – 1,711 : (4,418 + 1,382)
7	(39,3 + 116,7) *0,39 – (19,01 -16,56) : 2,5
8	(2,747 : 0,67 + 0,05) : (0,54* 7,7 – 0,008)
9	5,76*4,76 : 6,12 + 81,9 : 58,5*2,05
10	25,6 : (38,07 + 1,93) + 0,037 *10
11	(3,7011: 0,73 – 9,27: 4,5 – 1,41) :1,6
12	40,86 : 4,5 – 0,6039 : 5,49 + 0.338: 0,13
13	(85,9 +667,1) : ((37 +13,2) + (11,44 – 6,42)*10
14	1,224 : (7 – 2,92) + 1,06*(13,5 – 3)
15	(7,5* 48 – 8,2* 9,5 + 141,4) : (254,1 :4,2)
16	0,63*69 – 10,048 : 6,4 – 19,44 : 32,4 *0,8

17	(3,8 : 19 + 1,9 : 3,8) *5,2 + 7,28 : 7
18	(4,9 + 1,06 – 0,98) : (0,83*0,6) : 2,4
19	(28,7 *0,15) : (0,25 *0,21) + 22,5 :1,25
20	0,1 : 0,002 + (7,91 : 0,565 - 11,1 : 1,48)
21	(0,2028 :0,24 – 0,32 *1,5) *(4,05 – 13,1625 : 4,05)
22	(97,44 : 0,48 + 128,64 : 3,2) *0,25 – 17,89
23	5,4 + ((4,7 – 2,85)*1,8 + 0,0156 : 0,13)
24	(1,2 *0,15 + 12 :100 – 1,4 : 10) : 0,1
25	0,545 : 0,5 +2,75 *0,4 – 0,45 *3,8
26	0,6 * (7,24 : 0,8 – 0,968 : 0,16) + 2,25 *0,04
27	(6,4 *0,025 + 7,07 : 3,5 – 3,68 : 4) : 0,9
28	2,5 *(3 : 6 – 0,2 : 5 + 1,2 *0,15)
29	(5,508 : 0,27 – 10,2 *1,3) : 0,7 + 1,3 : 0,1
30	1,5 + 0,5*(4,214 : 0,14 – 5,436 : 1,8) * 0,1

Ответы Математический тренажер

Действия с десятичными дробями

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1	99,4972	13,66	19,215	35,66
2	2,8868	5,58	0,1	15
3	3,3495	11,3	6,084	8
4	54,675	0,7	0,694	1,12
5	32,06	4,8	34,8	28
6	28,79	5	9,05	0,41
7	1,436	12,36	2,4	59,86
8	26,231	1	0,044	1
9	32,77	36,665	27,55	7,35
10	7,07	0,64	4,5	1,01
11	76,62	100	3,3	1
12	24,4	2	44	11,57
13	11	3	0,081	7,5
14	0,09	5,1136	0,3	11,43
15	2,917	21,2	0,31	7
16	42,788	1,4	13,8	41,42
17	0,736	298,2882	10,598	4,68
18	0,03062	12,48	15,09	2,4
19	47,5	470,58237	35,03	100
20	2,2	10	5,1	56,5

21	0,426	11,9	10	0,292
22	50	2,365	0,599	42,91
23	60,001	18,7	10	8,85
24	45,475	9331,8	6,4	16
25	46,75	6,112	65	10,38
26	53,25	62,8	10,8	1,89
27	24	40,84	0	1,4
28	4,5	6,4	5,3	1,6
29	15	0,8498	0	23,2
30	1,6	0,121	1	2,854

ТРЕНАЖЕР

ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ

Выполнить сложение обыкновенных дробей

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\frac{5}{7}+\frac{2}{7}$	$\frac{18}{21}+\frac{3}{21}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}+\frac{2}{5}$
$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$	$\frac{11}{18}+\frac{7}{18}$	$\frac{6}{13}+\frac{20}{13}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$
$\frac{3}{8}+\frac{4}{8}$	$\frac{5}{9}+\frac{4}{9}$	$\frac{5}{11}+\frac{17}{11}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$
$\frac{1}{12}+\frac{4}{12}$	$\frac{11}{23}+\frac{12}{23}$	$\frac{18}{21}+\frac{3}{21}$	$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$
$\frac{7}{11}+\frac{2}{11}$	$\frac{6}{13}+\frac{7}{13}$	$\frac{21}{30}+\frac{39}{30}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$	$\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$
$\frac{4}{13}+\frac{5}{13}$	$\frac{18}{21}+\frac{3}{21}$	$\frac{1}{9}+\frac{17}{9}$	$\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$	$\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$
$\frac{2}{9}+\frac{5}{9}$	$\frac{5}{11}+\frac{6}{11}$	$\frac{4}{11}+\frac{18}{11}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$	$\frac{2}{7}+\frac{1}{3}$
$\frac{1}{7}+\frac{3}{7}$	$\frac{6}{13}+\frac{7}{13}$	$\frac{7}{13}+\frac{19}{13}$	$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{7}$
$\frac{12}{17}+\frac{3}{17}$	$\frac{23}{25}+\frac{2}{25}$	$\frac{17}{14}+\frac{11}{14}$	$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$	$\frac{3}{7}+\frac{2}{3}$
$\frac{21}{23}+\frac{1}{23}$	$\frac{11}{18}+\frac{7}{18}$	$\frac{16}{21}+\frac{26}{21}$	$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}$	$\frac{2}{6}+\frac{1}{5}$
$\frac{16}{27}+\frac{6}{27}$	$\frac{21}{28}+\frac{7}{28}$	$\frac{15}{18}+\frac{21}{18}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$	$\frac{3}{7}+\frac{3}{4}$
$\frac{11}{25}+\frac{3}{25}$	$\frac{16}{20}+\frac{4}{20}$	$\frac{11}{19}+\frac{27}{19}$	$\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$	$\frac{2}{5}+\frac{2}{3}$
$\frac{4}{31}+\frac{15}{31}$	$\frac{18}{37}+\frac{19}{37}$	$\frac{21}{25}+\frac{29}{25}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}+\frac{2}{7}$
$\frac{17}{30}+\frac{12}{30}$	$\frac{25}{41}+\frac{16}{41}$	$\frac{18}{20}+\frac{22}{20}$	$\frac{1}{7}+\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$
$\frac{23}{50}+\frac{14}{50}$	$\frac{19}{39}+\frac{20}{39}$	$\frac{16}{12}+\frac{8}{12}$	$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$	$\frac{6}{7}+\frac{1}{3}$

$\frac{17}{44}+\frac{18}{44}$	$\frac{23}{31}+\frac{8}{31}$	$\frac{13}{22}+\frac{31}{22}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$
$\frac{21}{39}+\frac{11}{39}$	$\frac{32}{45}+\frac{13}{45}$	$\frac{16}{18}+\frac{20}{18}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$	$\frac{2}{7}+\frac{5}{6}$

До 1

$\frac{2}{3}+\frac{}{3}=1$	$\frac{}{7}+\frac{6}{7}=1$	$\frac{21}{37}+\frac{}{37}=1$	$\frac{5}{6}+\frac{}{6}=1$	$\frac{3}{17}+\frac{}{17}=1$
$\frac{3}{5}+\frac{}{5}=1$	$\frac{}{12}+\frac{5}{12}=1$	$\frac{}{42}+\frac{30}{42}=1$	$\frac{2}{7}+\frac{}{7}=1$	$\frac{9}{12}+\frac{}{12}=1$
$\frac{4}{9}+\frac{}{9}=1$	$\frac{}{11}+\frac{9}{11}=1$	$\frac{19}{27}+\frac{}{27}=1$	$\frac{8}{13}+\frac{}{13}=1$	$\frac{11}{16}+\frac{}{16}=1$
$\frac{5}{11}+\frac{}{11}=1$	$\frac{}{14}+\frac{8}{14}=1$	$\frac{}{25}+\frac{18}{25}=1$	$\frac{4}{9}+\frac{}{9}=1$	$\frac{15}{22}+\frac{}{22}=1$
$\frac{3}{7}+\frac{}{7}=1$	$\frac{}{16}+\frac{9}{16}=1$	$\frac{18}{27}+\frac{}{27}=1$	$\frac{11}{15}+\frac{}{15}=1$	$\frac{}{23}+\frac{19}{23}=1$
$\frac{8}{9}+\frac{}{9}=1$	$\frac{}{15}+\frac{8}{15}=1$	$\frac{}{26}+\frac{19}{26}=1$	$\frac{8}{17}+\frac{}{17}=1$	$\frac{}{26}+\frac{17}{26}=1$
$\frac{1}{6}+\frac{}{6}=1$	$\frac{2}{11}+\frac{}{11}=1$	$\frac{17}{31}+\frac{}{31}=1$	$\frac{5}{18}+\frac{}{18}=1$	$\frac{26}{35}+\frac{}{35}=1$
$\frac{4}{10}+\frac{}{10}=1$	$\frac{3}{12}+\frac{}{12}=1$	$\frac{}{22}+\frac{18}{22}=1$	$\frac{19}{25}+\frac{}{25}=1$	$\frac{}{36}+\frac{29}{36}=1$
$\frac{5}{12}+\frac{}{12}=1$	$\frac{5}{14}+\frac{}{14}=1$	$\frac{}{33}+\frac{15}{33}=1$	$\frac{8}{16}+\frac{}{16}=1$	$\frac{7}{11}+\frac{}{11}=1$
$\frac{6}{9}+\frac{}{9}=1$	$\frac{6}{13}+\frac{}{13}=1$	$\frac{23}{41}+\frac{}{41}=1$	$\frac{}{14}+\frac{8}{14}=1$	$\frac{}{18}+\frac{9}{18}=1$
$\frac{12}{13}+\frac{}{13}=1$	$\frac{9}{16}+\frac{}{16}=1$	$\frac{19}{37}+\frac{}{37}=1$	$\frac{}{31}+\frac{18}{31}=1$	$\frac{26}{31}+\frac{}{31}=1$
$\frac{21}{26}+\frac{}{26}=1$	$\frac{2}{17}+\frac{}{17}=1$	$\frac{}{35}+\frac{16}{35}=1$	$\frac{}{36}+\frac{14}{36}=1$	$\frac{27}{42}+\frac{}{42}=1$
$\frac{18}{31}+\frac{}{31}=1$	$\frac{8}{19}+\frac{}{19}=1$	$\frac{15}{21}+\frac{}{21}=1$	$\frac{16}{33}+\frac{}{33}=1$	$\frac{}{24}+\frac{18}{24}=1$

$\frac{23}{30} + \frac{\quad}{30} = 1$	$\frac{11}{20} + \frac{\quad}{20} = 1$	$\frac{\quad}{23} + \frac{16}{23} = 1$	$\frac{19}{27} + \frac{\quad}{27} = 1$	$\frac{17}{23} + \frac{\quad}{23} = 1$
$\frac{17}{29} + \frac{\quad}{29} = 1$	$\frac{15}{26} + \frac{\quad}{26} = 1$	$\frac{27}{42} + \frac{\quad}{42} = 1$	$\frac{16}{28} + \frac{\quad}{28} = 1$	$\frac{7}{13} + \frac{\quad}{13} = 1$
$\frac{23}{41} + \frac{\quad}{41} = 1$	$\frac{12}{23} + \frac{\quad}{23} = 1$	$\frac{\quad}{34} + \frac{17}{34} = 1$	$\frac{18}{21} + \frac{\quad}{21} = 1$	$\frac{\quad}{43} + \frac{25}{43} = 1$
$\frac{27}{53} + \frac{\quad}{53} = 1$	$\frac{21}{25} + \frac{\quad}{25} = 1$	$\frac{29}{41} + \frac{\quad}{41} = 1$	$\frac{19}{30} + \frac{\quad}{30} = 1$	$\frac{\quad}{33} + \frac{18}{33} = 1$

Выполнить вычитание дробей из натурального числа

$1 - \frac{1}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$	$3 - \frac{1}{2}$	$4 - \frac{3}{8}$	$9 - 1\frac{1}{4}$
$1 - \frac{3}{4}$	$2 - \frac{3}{4}$	$3 - \frac{3}{4}$	$6 - \frac{7}{12}$	$5 - 1\frac{2}{3}$
$1 - \frac{5}{7}$	$2 - \frac{5}{7}$	$3 - \frac{5}{7}$	$5 - \frac{8}{9}$	$7 - 3\frac{5}{7}$
$1 - \frac{6}{11}$	$2 - \frac{6}{11}$	$3 - \frac{6}{11}$	$7 - \frac{3}{7}$	$5 - 2\frac{6}{7}$
$1 - \frac{3}{10}$	$2 - \frac{3}{10}$	$3 - \frac{3}{10}$	$9 - \frac{1}{2}$	$9 - 4\frac{5}{9}$
$1 - \frac{2}{7}$	$2 - \frac{2}{7}$	$3 - \frac{2}{7}$	$8 - \frac{5}{13}$	$6 - 4\frac{2}{9}$
$1 - \frac{5}{12}$	$2 - \frac{5}{12}$	$3 - \frac{5}{12}$	$11 - \frac{6}{11}$	$9 - 2\frac{4}{5}$
$1 - \frac{6}{17}$	$2 - \frac{6}{17}$	$3 - \frac{6}{17}$	$5 - \frac{7}{8}$	$5 - 3\frac{1}{2}$
$1 - \frac{7}{9}$	$2 - \frac{7}{9}$	$3 - \frac{7}{9}$	$6 - \frac{1}{9}$	$19 - 6\frac{1}{3}$
$1 - \frac{2}{5}$	$2 - \frac{2}{5}$	$3 - \frac{2}{5}$	$20 - \frac{2}{7}$	$25 - 5\frac{5}{6}$
$1 - \frac{1}{6} = \frac{\quad}{\quad}$	$2 - \frac{1}{6}$	$3 - \frac{1}{6}$	$14 - \frac{3}{5}$	$19 - 8\frac{5}{8}$
$1 - \frac{7}{8} = \frac{\quad}{\quad}$	$2 - \frac{7}{8}$	$3 - \frac{7}{8}$	$32 - \frac{11}{12}$	$15 - 11\frac{3}{8}$
$1 - \frac{1}{7} = \frac{\quad}{\quad}$	$2 - \frac{1}{7}$	$3 - \frac{1}{7}$	$15 - \frac{7}{12}$	$11 - 5\frac{4}{7}$

$1 - \frac{3}{11} = —$	$2 - \frac{3}{11}$	$3 - \frac{3}{11}$	$22 - \frac{6}{7}$	$10 - 3\frac{1}{8}$
$1 - \frac{2}{10} = —$	$2 - \frac{2}{10}$	$3 - \frac{2}{10}$	$18 - \frac{10}{13}$	$12 - 5\frac{3}{5}$
$1 - \frac{4}{11} = —$	$2 - \frac{4}{11}$	$3 - \frac{4}{11}$	$19 - \frac{2}{9}$	$15 - 9\frac{1}{2}$
$1 - \frac{1}{8} = —$	$2 - \frac{1}{8}$	$3 - \frac{1}{8}$	$25 - \frac{1}{8}$	$7 - 1\frac{8}{9}$

Выполнить сложение и вычитание смешанных дробей

$1\frac{3}{5} + 2\frac{1}{5}$	$2\frac{3}{7} + 1\frac{4}{7}$	$2\frac{7}{8} - 1\frac{3}{8}$	$-4\frac{5}{8} + \frac{2}{8}$	$-2\frac{5}{6} + 2\frac{5}{6}$
$5\frac{2}{7} + 2\frac{3}{7}$	$1\frac{1}{5} + 3\frac{4}{5}$	$4\frac{9}{11} - 2\frac{2}{11}$	$6\frac{9}{11} - 12\frac{10}{11}$	$1\frac{1}{7} + \frac{8}{7}$
$4\frac{6}{11} + 3\frac{2}{11}$	$2\frac{3}{8} + 1\frac{5}{8}$	$5\frac{6}{7} - 3\frac{5}{7}$	$-3\frac{7}{12} + 2\frac{7}{12}$	$-1\frac{10}{11} - 1\frac{2}{11}$
$\frac{2}{5} + 3\frac{2}{5}$	$3\frac{2}{6} + 4\frac{4}{6}$	$7\frac{6}{9} - 2\frac{4}{9}$	$-2\frac{5}{17} - 7\frac{8}{17}$	$3\frac{5}{8} + 1\frac{4}{8}$
$4\frac{5}{9} + 1\frac{2}{9}$	$5\frac{6}{11} + 2\frac{5}{11}$	$5\frac{10}{13} - 5\frac{9}{13}$	$-4\frac{5}{18} - 3\frac{13}{18}$	$-2\frac{4}{7} - 1\frac{5}{7}$
$3\frac{6}{13} + 3\frac{5}{13}$	$3\frac{1}{9} + 4\frac{8}{9}$	$7\frac{15}{17} - 4\frac{8}{17}$	$-3\frac{5}{7} + 8\frac{12}{7}$	$2\frac{5}{9} + 3\frac{5}{9}$
$1\frac{3}{8} + 5\frac{4}{8}$	$7\frac{7}{12} + 3\frac{5}{12}$	$10\frac{11}{12} - 5\frac{9}{12}$	$-1\frac{6}{13} - 2\frac{7}{13}$	$1\frac{5}{3} + 6\frac{2}{3}$
$2\frac{5}{10} + 4\frac{4}{10}$	$5\frac{6}{13} + 4\frac{7}{13}$	$1\frac{20}{21} - \frac{16}{21}$	$-\frac{5}{6} - 2\frac{1}{6}$	$2\frac{3}{5} - 1\frac{4}{5}$
$1\frac{7}{15} + 1\frac{4}{15}$	$3\frac{6}{19} + 1\frac{13}{19}$	$6\frac{11}{19} - 1\frac{7}{19}$	$\frac{3}{21} - \frac{7}{21}$	$2\frac{3}{8} - 1\frac{5}{8}$
$6\frac{4}{9} + 5\frac{1}{9}$	$3\frac{7}{18} + 7\frac{11}{18}$	$7\frac{18}{24} - 3\frac{13}{24}$	$-\frac{11}{26} + \frac{19}{26}$	$2\frac{5}{12} - \frac{7}{12}$
$5\frac{6}{12} + 3\frac{5}{12}$	$2\frac{9}{21} + 8\frac{12}{21}$	$9\frac{23}{26} - 2\frac{18}{26}$	$-\frac{17}{25} - 5\frac{8}{25}$	$4\frac{5}{13} - 2\frac{12}{13}$
$7\frac{3}{17} + 2\frac{11}{17}$	$6\frac{6}{25} + 6\frac{19}{25}$	$11\frac{11}{17} - 5\frac{9}{17}$	$1\frac{12}{31} - 6\frac{16}{31}$	$3\frac{3}{10} - 1\frac{7}{10}$
$2\frac{1}{6} + 6\frac{4}{6}$	$4\frac{11}{23} + 7\frac{12}{23}$	$5\frac{21}{22} - 3\frac{16}{22}$	$\frac{5}{13} - 1\frac{9}{13}$	$3\frac{1}{8} - 2\frac{5}{8}$
$7\frac{2}{7} + 7\frac{3}{7}$	$6\frac{8}{11} + 5\frac{3}{11}$	$4\frac{11}{18} - 4\frac{7}{18}$	$-6\frac{13}{17} + 4\frac{12}{17}$	$5\frac{2}{9} - 2\frac{5}{9}$

$2\frac{4}{20} + 4\frac{13}{20}$	$2\frac{6}{14} + 7\frac{8}{14}$	$5\frac{21}{22} - 1\frac{17}{22}$	$-1\frac{13}{16} - 2\frac{3}{16}$	$3\frac{4}{15} - 1\frac{11}{15}$
$3\frac{3}{14} + 8\frac{9}{14}$	$6\frac{12}{17} + 11\frac{5}{17}$	$4\frac{25}{41} - 3\frac{18}{41}$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$	$5\frac{5}{16} - 3\frac{11}{16}$
$9\frac{8}{17} + 3\frac{8}{17}$	$6\frac{4}{13} + 9\frac{9}{13}$	$6\frac{31}{43} - 4\frac{26}{43}$	$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$	$-1\frac{11}{14} - 2\frac{13}{14}$

Выполнить умножение дробей

$\frac{3}{5} * \frac{1}{5}$	$\frac{2}{3} *(-\frac{1}{4})$	$\frac{4}{5} * 2$	$\frac{5}{9} * 9$	$\frac{3}{5} * \frac{10}{9}$
$\frac{3}{4} * \frac{1}{2}$	$-\frac{3}{5} * \frac{10}{11}$	$\frac{3}{7} * 5$	$\frac{7}{6} * 6$	$\frac{4}{15} * \frac{3}{2}$
$\frac{4}{7} * \frac{2}{3}$	$-\frac{9}{10} * (-\frac{7}{3})$	$\frac{2}{11} * 3$	$\frac{3}{5} * 5$	$\frac{12}{5} * \frac{15}{16}$
$\frac{5}{6} * \frac{7}{3}$	$\frac{5}{7} * \frac{14}{17}$	$\frac{1}{7} * 4$	$\frac{9}{11} * 11$	$\frac{8}{9} * \frac{27}{4}$
$\frac{4}{11} * \frac{3}{5}$	$\frac{4}{9} * \frac{5}{4}$	$\frac{5}{6} * 7$	$\frac{5}{7} * 7$	$\frac{4}{18} * \frac{9}{8}$
$\frac{3}{7} * \frac{3}{5}$	$\frac{8}{11} * \frac{3}{16}$	$\frac{5}{7} * 2$	$\frac{5}{4} * 4$	$-\frac{7}{15} * \frac{10}{14}$
$\frac{7}{8} * \frac{5}{9}$	$\frac{6}{5} * \frac{10}{17}$	$\frac{5}{9} * 8$	$\frac{7}{8} * 8$	$\frac{5}{6} * \frac{12}{10}$
$\frac{9}{10} * \frac{3}{2}$	$\frac{7}{15} * (-\frac{5}{9})$	$\frac{3}{11} *5$	$\frac{9}{2} * 2$	$\frac{8}{10} * \frac{5}{24}$
$\frac{9}{11} * \frac{2}{5}$	$\frac{16}{13} * \frac{5}{8}$	$\frac{11}{12} * 7$	$5*\frac{4}{15}$	$\frac{7}{42} * (-\frac{6}{9})$
$\frac{3}{5} * \frac{6}{7}$	$\frac{7}{12} * \frac{3}{4}$	$\frac{8}{19} * 9$	$8* \frac{7}{16}$	$\frac{9}{30} * \frac{15}{18}$
$\frac{6}{13} * \frac{2}{5}$	$\frac{8}{15} * \frac{3}{5}$	$\frac{5}{22} * 3$	$9* \frac{2}{27}$	$-\frac{4}{8} * \frac{5}{10}$
$\frac{8}{15} * \frac{2}{3}$	$-\frac{18}{7} *(-\frac{2}{9})$	$\frac{3}{11} * 4$	$5* \frac{8}{25}$	$\frac{9}{36} * \frac{5}{10}$
$\frac{5}{12} * \frac{7}{4}$	$\frac{13}{14} * \frac{28}{15}$	$\frac{6}{17} * 8$	$\frac{4}{27} * 18$	$\frac{21}{6} * \frac{1}{7}$
$\frac{6}{13} * \frac{5}{7}$	$\frac{4}{5} * (-\frac{15}{13})$	$\frac{25}{31} *2$	$16* \frac{7}{12}$	$\frac{2}{27} * \frac{9}{4}$

$\frac{2}{9} * \frac{11}{9}$	$\frac{12}{17} * \frac{5}{3}$	$\frac{11}{8} * (-9)$	$\frac{8}{33} * 11$	$\frac{22}{25} * \frac{5}{11}$
$\frac{7}{12} * \frac{5}{6}$	$\frac{36}{2} * \frac{5}{27}$	$-\frac{9}{15} * (-7)$	$27 * \frac{13}{36}$	$\frac{9}{27} * \frac{18}{6}$
$\frac{8}{11} * \frac{2}{3}$	$-\frac{12}{7} * \frac{1}{8}$	$\frac{3}{7} * 4$	$\frac{1}{32} * 48$	$-\frac{5}{7} * \frac{9}{45}$

Умножить смешанную дробь на число, используя распределительный закон

a *(b + c) = ab + ac.

$2\frac{1}{3} * 2$	$2\frac{3}{25} * 5$	$1\frac{4}{5} * 2$	$1\frac{3}{4} * 2$
$3\frac{2}{7} * 3$	$5\frac{1}{12} * 3$	$2\frac{3}{7} * 3$	$2\frac{7}{36} * 6$
$1\frac{4}{11} * 2$	$2\frac{4}{20} * 4$	$1\frac{2}{11} * 6$	$2\frac{4}{15} * 5$
$5\frac{1}{6} * 5$	$6\frac{5}{18} * 3$	$4\frac{2}{7} * 4$	$1\frac{9}{55} * 11$
$3\frac{4}{21} * 5$	$3\frac{1}{10} * 5$	$2\frac{6}{11} * 2$	$1\frac{5}{21} * 7$
$2\frac{3}{10} * 3$	$2\frac{5}{16} * 2$	$3\frac{10}{19} * 2$	$1\frac{3}{8} * 4$
$4\frac{2}{11} * 4$	$3\frac{2}{21} * 7$	$5\frac{5}{11} * 3$	$1\frac{7}{16} * 8$
$5\frac{3}{7} * 2$	$5\frac{4}{14} * 2$	$2\frac{3}{11} * 5$	$1\frac{7}{6} * 2$
$4\frac{3}{13} * 3$	$3\frac{3}{28} * 7$	$3\frac{3}{17} * 7$	$1\frac{8}{15} * 3$
$5\frac{2}{9} * 2$	$3\frac{7}{40} * 4$	$2\frac{3}{19} * 9$	$8 * 1\frac{7}{24}$
$1\frac{4}{21} * 5$	$2\frac{4}{30} * 6$	$1\frac{8}{22} * 3$	$9 * 1\frac{4}{27}$
$2\frac{4}{17} * 4$	$5\frac{8}{27} * 3$	$4\frac{3}{11} * 4$	$5 * 1\frac{8}{25}$
$3\frac{3}{16} * 5$	$1\frac{3}{16} * 4$	$2\frac{3}{17} * 8$	$1\frac{10}{27} * 3$

$2\frac{3}{19} * 6$	$5\frac{4}{18} * 2$	$1\frac{20}{31} * 2$	$4 * 1\frac{7}{12}$
$5\frac{2}{11} * 3$	$2\frac{9}{55} * 5$	$2\frac{2}{13} * 9$	$1\frac{8}{33} * 11$
$1\frac{5}{13} * 2$	$6\frac{1}{32} * 8$	$1\frac{4}{15} * 7$	$9 * 1\frac{13}{36}$
$3\frac{4}{25} * 6$	$1\frac{6}{49} * 7$	$3\frac{3}{7} * 4$	$2\frac{5}{28} * 7$

Выполнить деление

$\frac{3}{5} : \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$	$\frac{4}{5} : 2$	$9 : \frac{1}{2}$	$1 : 2$
$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	$\frac{3}{5} : \frac{10}{11}$	$\frac{3}{7} : 5$	$\frac{7}{6} : \frac{1}{6}$	$3 : 7$
$\frac{4}{7} : \frac{2}{3}$	$\frac{9}{10} : \frac{7}{3}$	$\frac{2}{11} : 3$	$\frac{3}{5} : \frac{1}{5}$	$5 : 6$
$\frac{5}{6} : \frac{7}{3}$	$\frac{5}{7} : \frac{4}{7}$	$\frac{1}{7} : 4$	$\frac{9}{11} : \frac{1}{11}$	$11 : 3$
$\frac{4}{11} : \frac{3}{5}$	$\frac{4}{9} : \frac{5}{4}$	$\frac{5}{6} : 7$	$\frac{5}{7} : \frac{1}{7}$	$4 : 9$
$\frac{3}{7} : \frac{3}{5}$	$\frac{8}{11} : \frac{3}{11}$	$\frac{5}{7} : 2$	$\frac{5}{4} : \frac{1}{4}$	$1 : 11$
$\frac{7}{8} : \frac{5}{9}$	$\frac{6}{5} : \frac{3}{5}$	$\frac{5}{9} : 8$	$\frac{7}{8} : \frac{1}{8}$	$5 : 15$
$\frac{9}{10} : \frac{3}{2}$	$\frac{7}{15} : \frac{7}{5}$	$\frac{3}{11} : 5$	$\frac{9}{2} : \frac{1}{2}$	$3 : 12$
$\frac{9}{11} : \frac{2}{5}$	$\frac{1}{13} : \frac{5}{8}$	$\frac{7}{12} : 7$	$5 : \frac{15}{2}$	$21 : 14$
$\frac{3}{5} : \frac{6}{7}$	$\frac{7}{12} : \frac{3}{4}$	$\frac{9}{19} : 9$	$8 : \frac{8}{3}$	$1 : \frac{1}{2}$
$\frac{6}{13} : \frac{2}{5}$	$\frac{8}{15} : \frac{3}{5}$	$\frac{9}{22} : 3$	$9 : \frac{9}{8}$	$1 : \frac{1}{3}$
$\frac{8}{15} : \frac{1}{3}$	$\frac{18}{7} : \frac{9}{2}$	$\frac{8}{11} : 4$	$5 : \frac{25}{8}$	$1 : \frac{1}{5}$
$\frac{5}{12} : \frac{7}{5}$	$\frac{13}{14} : \frac{13}{14}$	$\frac{6}{5} : 8$	$\frac{4}{27} : \frac{1}{18}$	$1 : \frac{1}{6}$

$\frac{6}{13} : \frac{5}{7}$	$\frac{4}{5} : \frac{1}{15}$	$\frac{24}{31} : 2$	$16 : \frac{8}{7}$	$1 : \frac{1}{7}$
$\frac{2}{9} : \frac{11}{9}$	$\frac{2}{7} : \frac{5}{3}$	$\frac{3}{8} : 9$	$\frac{8}{33} : \frac{1}{11}$	$1 : \frac{1}{9}$
$\frac{7}{12} : \frac{5}{7}$	$\frac{14}{3} : \frac{7}{27}$	$\frac{9}{5} : 7$	$27 : \frac{9}{2}$	$1 : \frac{1}{11}$
$\frac{5}{11} * \frac{2}{3}$	$\frac{7}{12} : \frac{1}{8}$	$\frac{3}{7} : 4$	$\frac{1}{32} : \frac{1}{48}$	$1 : \frac{1}{8}$

Тесты по алгебре и началам анализа для 10-11 класса
«Тригонометрические функции»
«Тригонометрические уравнения»
« Преобразование тригонометрических выражений»

Данная работа состоит из трех разделов и поможет в организации контроля в тестовой форме на уроках изучения в 10 классе и итоговом повторении при подготовке к ЕГЭ в 11 классе по темам:

1.Тригонометрические функции. (3)
2.Тригонометрические уравнения. (2)
3.Преобразование тригонометрических выражений.(3)
учебник: Мордкович А.Г. «Алгебра10-11». Изд. «Мнемозина», 2010г.
Тесты представлены в двух вариантах.

Ключи к тестам:

Раздел №1

Тест № 1 по теме: « Распознавание графиков тригонометрических функций»

№п/п Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	1	4	2	1	2	4	1	2	3
2	4	3	2	3	2	4	4	2	4	2

Тест №2 по теме: « Распознавание графиков тригонометрических функций»

№ п/п Вариант	1	2	3	4	5	6
1	2	2	4	2	4	1
2	3	1	1	1	3	3

Тест №3 по теме: « Область значения тригонометрических функций»

№п/п Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	1	3	4	4	2	4	2	1
2	3	2	1	4	2	3	1	2	4	1

Раздел №2

Тест №1 по теме: «Простейшие тригонометрические уравнения»

№п/п Вариант	1	2	3	4	5
1	2	2	3	4	3
2	1	4	2	1	3

Тест №2 по теме: «Простейшие тригонометрические уравнения»

№ п/п Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	4	2	3	3	2	1	1	2	3
2	1	3	1	2	4	2	3	1	4	1

Раздел №3

Тест №1 по теме: «Формулы сложения»

№ п/п Вариант	1	2	3	4	5	6	***7***	***8***	***9***	***10***
1	3	4	1	4	1	2	2	3	1	2
2	1	2	2	3	1	1	3	3	1	1

Тест №2 по теме: «Формулы приведения»

№ п/п Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1	4	3	1	3	2	3	4	2
2	2	4	1	3	3	1	2	3	2	3

Тест №3 по теме: «Преобразование тригонометрических выражений»

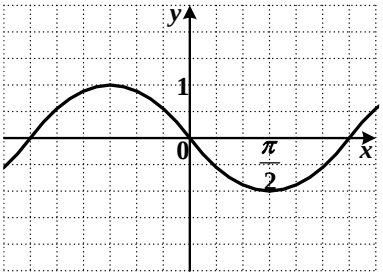
№ п/п Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	2	2	2	2	2	4	2	4
2	3	1	1	2	3	1	4	1	1	1

Раздел №1

Тест № 1 по теме: « Распознавание графиков тригонометрических функций»

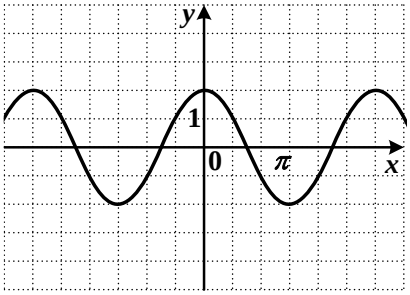
Вариант №1

1.График какой функции изображен на рисунке?



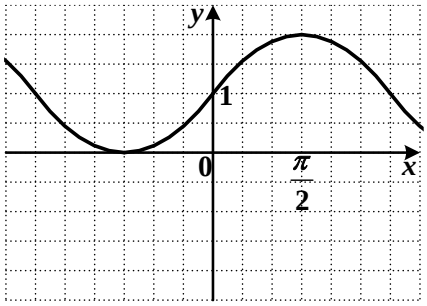
1) $y = \sin x$
2) $y = -\cos x$
3) $y = -\sin x$
4) $y = \cos x$

2.График какой функции изображен на рисунке?



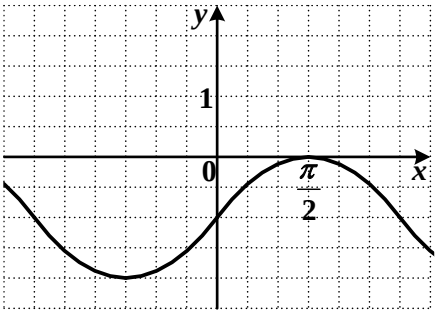
1) $y = 2\cos x$
2) $y = 2\sin x$
3) $y = \frac{1}{2}\cos x$
4) $y = -2\sin x$

3.График какой функции изображен на рисунке?



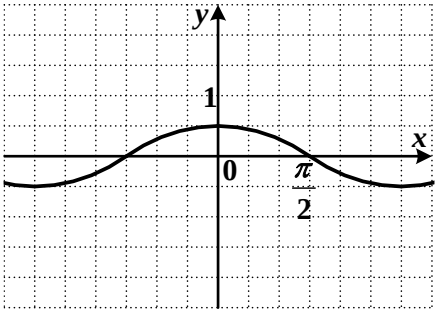
1) $y = \cos x + 1$
2) $y = \sin x - 1$
3) $y = \cos x - 1$
4) $y = \sin x + 1$

4. График какой функции изображен на рисунке?



1) $y = \cos x - 1$
2) $y = \sin x - 1$
3) $y = \cos x + 1$
4) $y = \sin x + 1$

5.График какой функции изображен на рисунке?



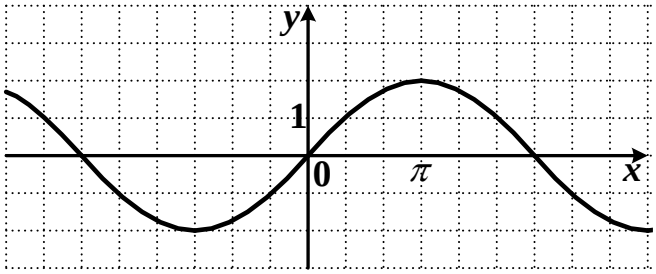
1) $y=\frac{1}{2}\cos x$

2) $y=-2\sin x$

3) $y=\frac{1}{2}\sin x$

4) $y=-\frac{1}{2}\cos x$

6.График какой функции изображен на рисунке?



1) $y=-\cos 2x$

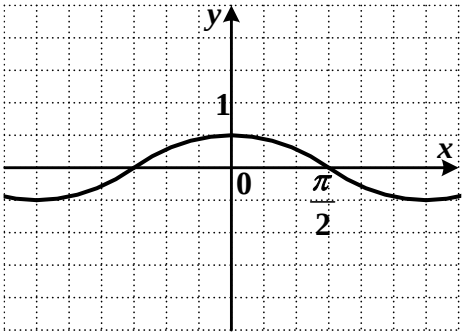
2) $y=2\sin\frac{x}{2}$

3) $y=-2\cos\frac{x}{2}$

4) $y=\sin 2x$

4) $y=\sin x$

7. График какой функции изображен на рисунке?



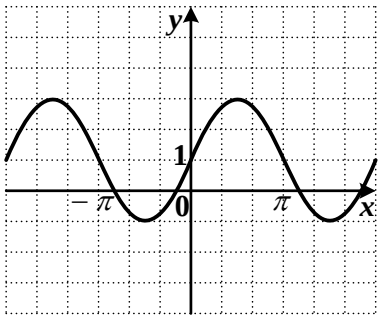
1) $y=-\frac{1}{2}\cos x$

2) $y=\frac{1}{2}\sin x$

3) $y=-2\sin x$

4) $y=\frac{1}{2}\cos x$

8.График какой функции изображен на рисунке?



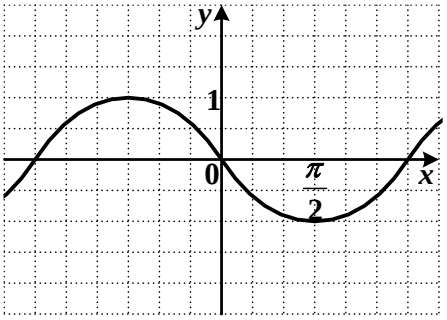
1) $y=2\sin x+1$

2) $y=2\cos x-1$

3) $y=\cos(2x)+1$

4) $y=2\sin x$

9. График какой функции изображен на рисунке?



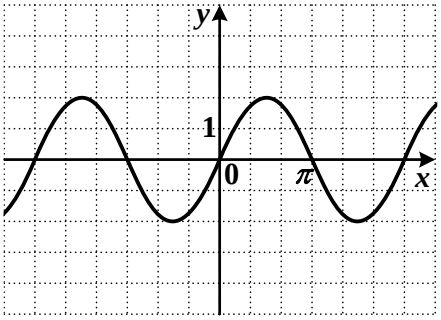
1) $y = \sin x$

2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

3) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

4) $y = -\cos x$

10.График какой функции изображен на рисунке?



1) $y = 2\cos x$

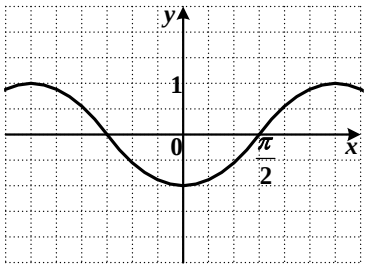
2) $y = -\frac{1}{2}\cos x$

3) $y = 2\sin x$

4) $y = -2\sin x$

Тест № 1 по теме: « Распознавание графиков тригонометрических функций»
Вариант №2

1.График какой функции изображен на рисунке?



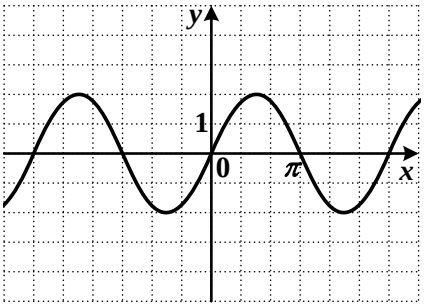
1) $y = \sin x$

2) $y = \cos x$

3) $y = -\sin x$

4) $y = -\cos x$

2.График какой функции изображен на рисунке?



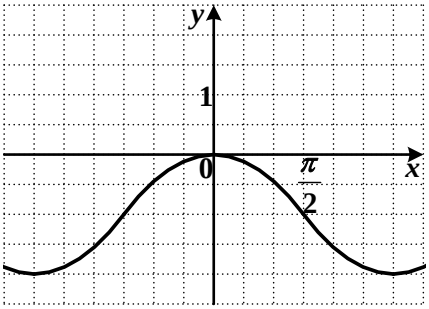
1) $y = -2\sin x$

2) $y = 2\cos x$

3) $y = 2\sin x$

4) $y = -\frac{1}{2}\cos x$

3.График какой функции изображен на рисунке?



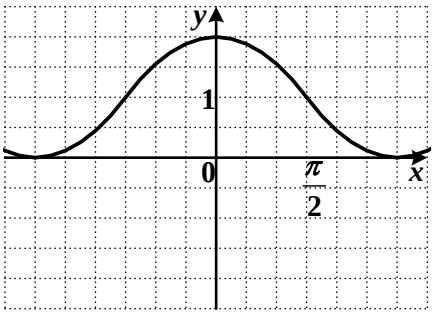
1) $y = \sin x - 1$

2) $y = \cos x - 1$

3) $y = \sin x + 1$

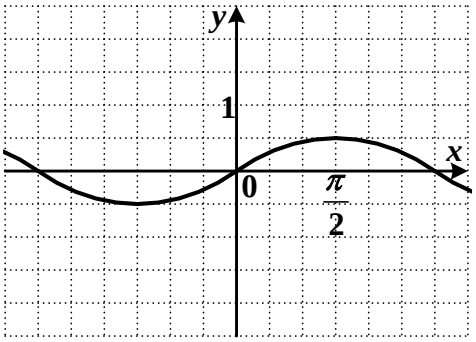
4) $y = \cos x + 1$

4.График какой функции изображен на рисунке?



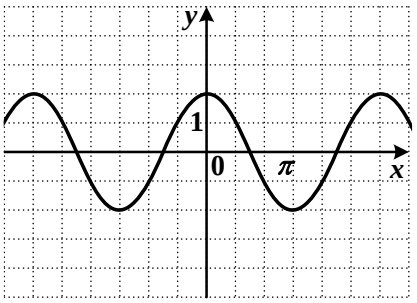
1) $y = \cos x - 1$
2) $y = \sin x + 1$
3) $y = \cos x + 1$
4) $y = \sin x - 1$

5.График какой функции изображен на рисунке?



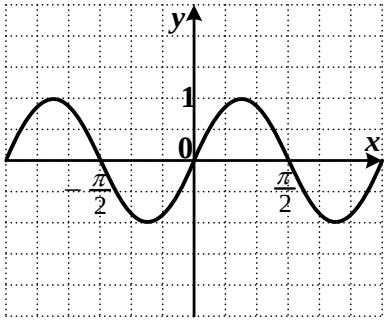
1) $y = -\frac{1}{2}\sin x$
2) $y = \frac{1}{2}\sin x$
3) $y = \frac{1}{2}\cos x$
4) $y = -2\cos x$

6.График какой функции изображен на рисунке?



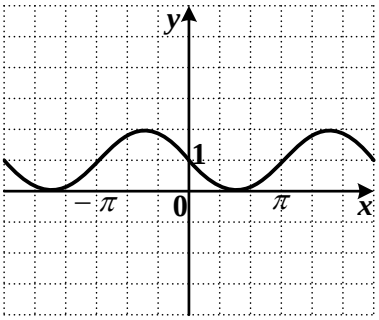
1) $y = 2\sin x$
2) $y = -2\sin x$
3) $y = \frac{1}{2}\cos x$
4) $y = 2\cos x$

7.График какой функции изображен на рисунке?



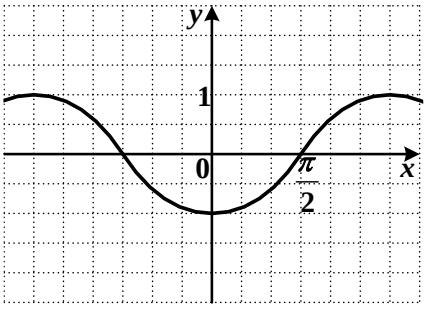
1) $y = -2\cos x$
2) $y = \cos\frac{x}{2}$
3) $y = \frac{1}{2}\sin x$
4) $y = \sin 2x$

8. График какой функции изображен на рисунке?



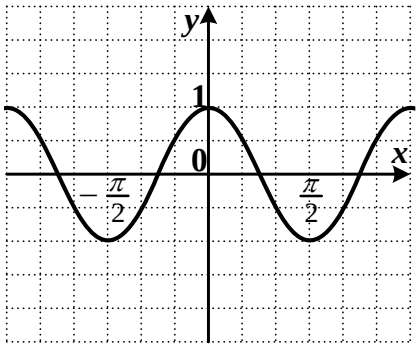
1) $y = \cos x - 1$
2) $y = -\sin x + 1$
3) $y = \frac{1}{2}\cos x + 1$
4) $y = -\sin(2x) - 1$

9. График какой функции изображен на рисунке?



1) $y = -\sin x$
2) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
3) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
4) $y = -\cos x$

10.График какой функции изображен на рисунке?



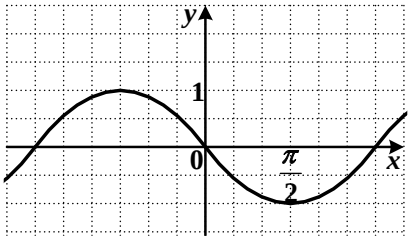
1) $y = \frac{1}{2}\cos x$
2) $y = \cos 2x$
3) $y = \sin\frac{x}{2}$
4) $y = -2\sin x$

Тест №2 по теме: « Распознавание графиков тригонометрических функций»

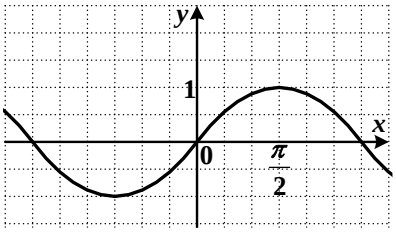
Вариант №1

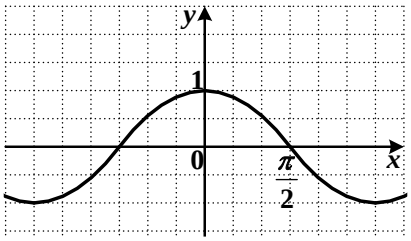
1. На одном из рисунков изображен эскиз графика функции $y = \sin x$. Укажите номер этого рисунка.

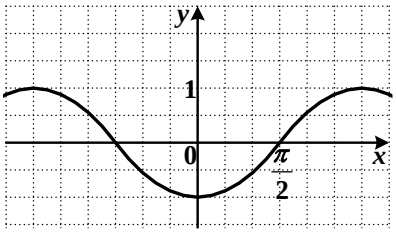
1)



2)

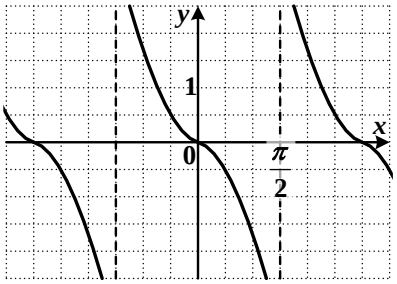


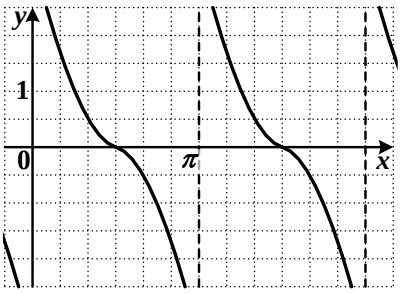
3) 

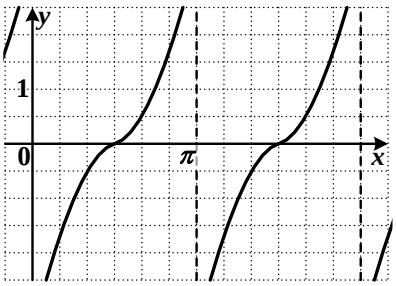
4) 

2. На одном из рисунков изображен эскиз графика функции $y = -\operatorname{tg} x$. Укажите номер этого рисунка.

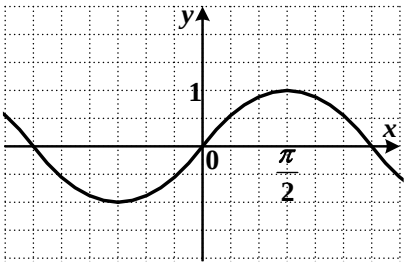
1) 

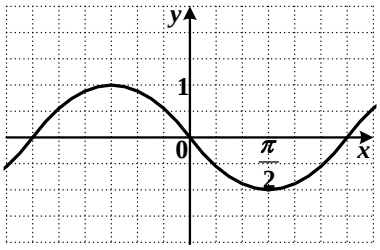
2) 

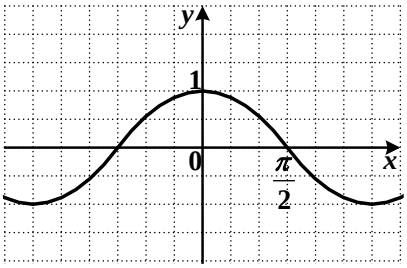
3) 

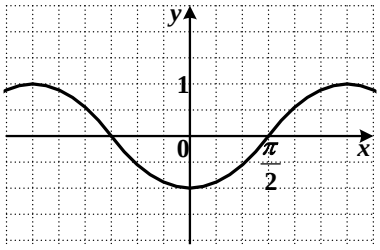
4) 

3.На одном из рисунков изображен эскиз графика функции $y = -\cos x$. Укажите номер этого рисунка.

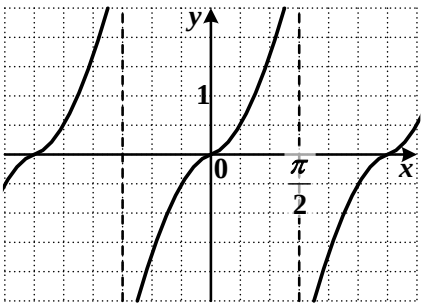
1) 

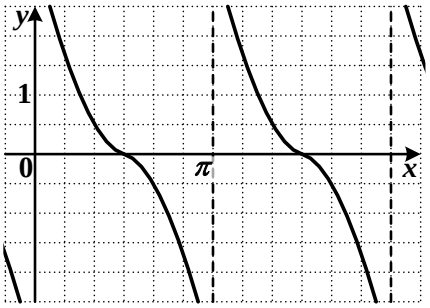
2) 

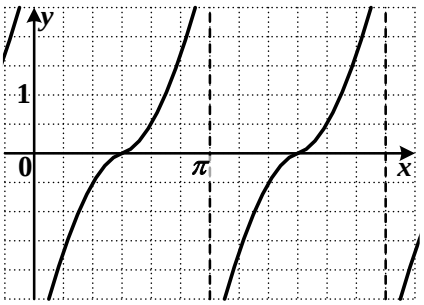
3) 

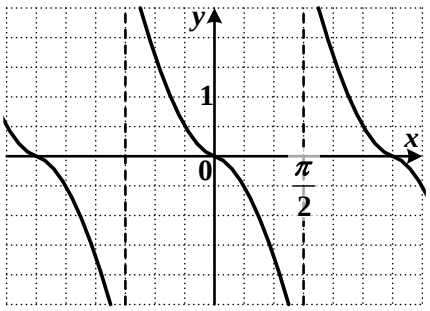
4) 

4.На одном из рисунков изображен эскиз графика функции $y = \operatorname{ctg} x$. Укажите номер этого рисунка.

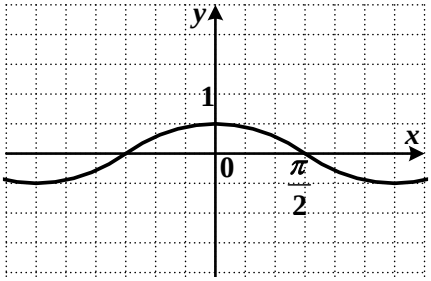
1) 

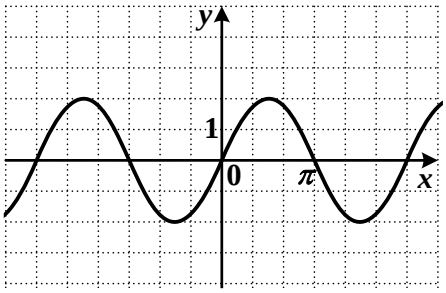
2) 

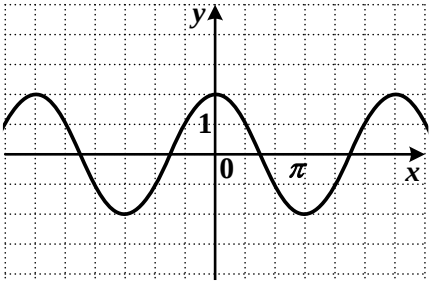
3) 

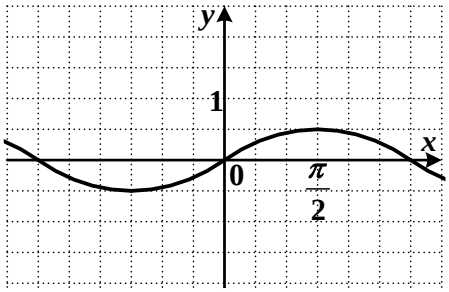
4) 

5.На одном из рисунков изображен эскиз графика функции $y=\frac{1}{2}\sin x$. Укажите номер этого рисунка.

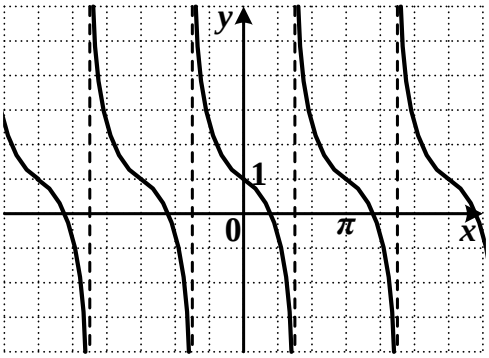
1) 

2) 

3) 

4) 

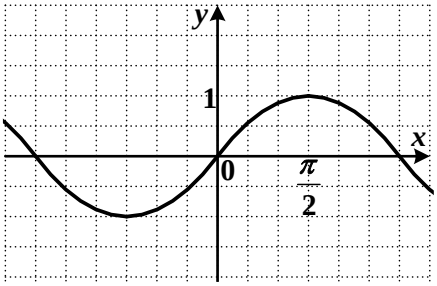
6. График какой функции изображен на рисунке?

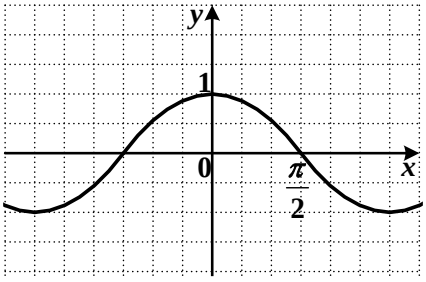


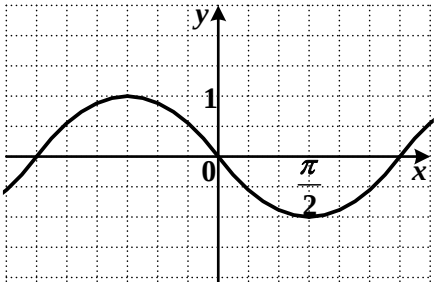
1) $y=-\operatorname{tg}x+1$
2) $y=\operatorname{ctg}x+1$
3) $y=\operatorname{tg}(x+1)$
4) $y=\operatorname{ctg}(x-1)$

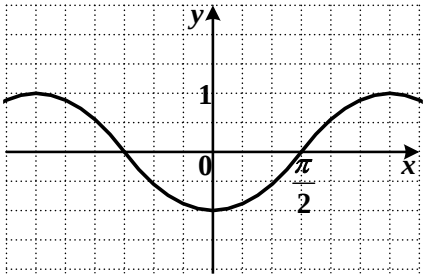
Тест №2 по теме: « Распознавание графиков тригонометрических функций»
Вариант №2

1. На одном из рисунков изображен эскиз графика функции $y = -\sin x$. Укажите номер этого рисунка.

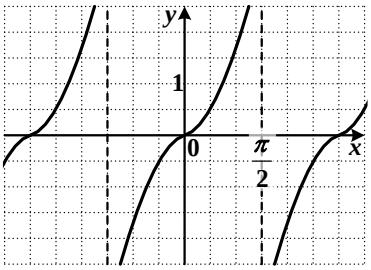
1) 

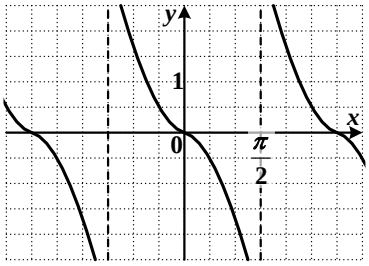
2) 

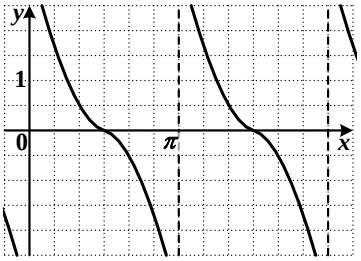
3) 

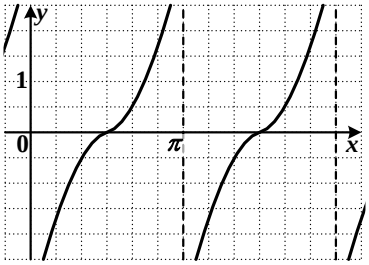
4) 

2. На одном из рисунков изображен эскиз графика функции $y = \operatorname{tg} x$. Укажите номер этого рисунка.

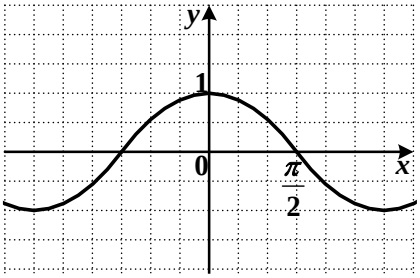
1) 

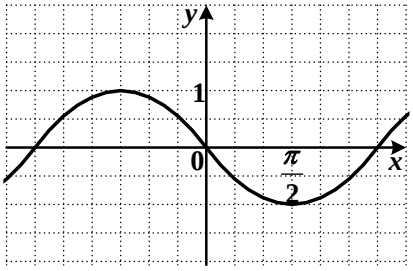
2) 

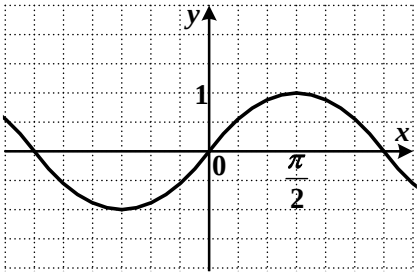
3) 

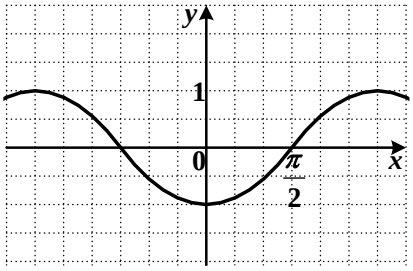
4) 

3. На одном из рисунков изображен эскиз графика функции $y = \cos x$. Укажите номер этого рисунка.

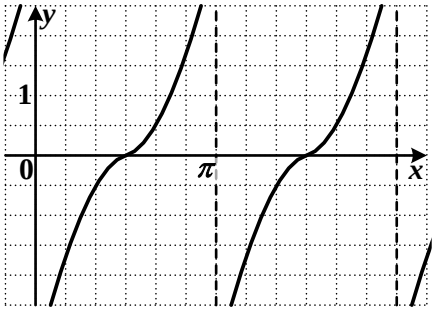
1) 

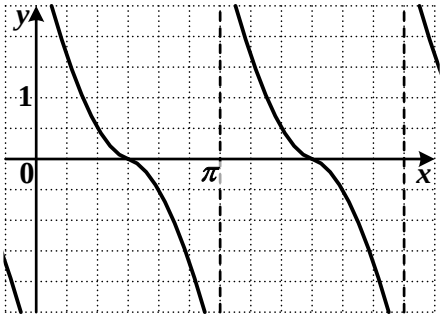
2) 

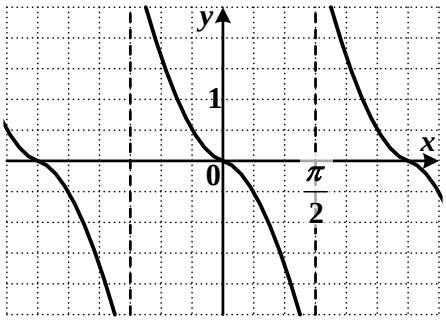
3) 

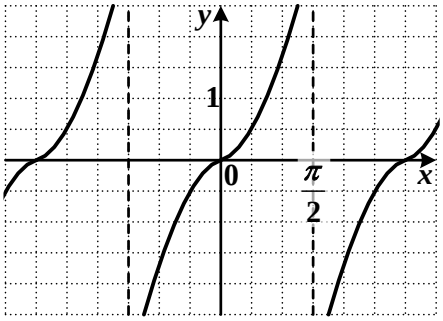
4) 

4. На одном из рисунков изображен эскиз графика функции $y = -\operatorname{ctg} x$. Укажите номер этого рисунка.

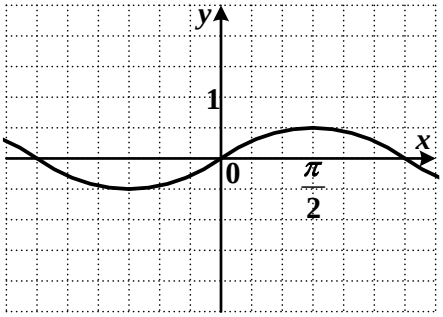
1) 

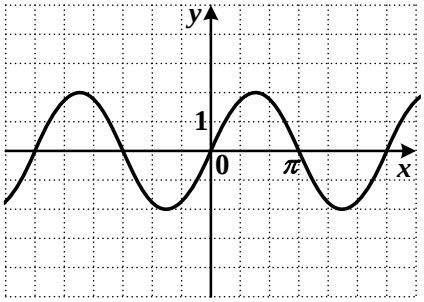
2) 

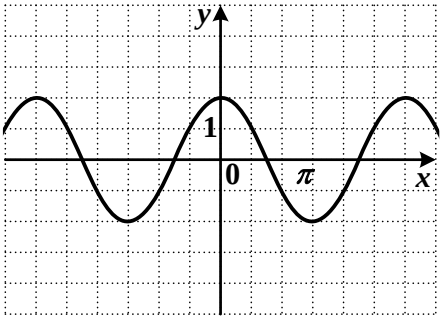
3) 

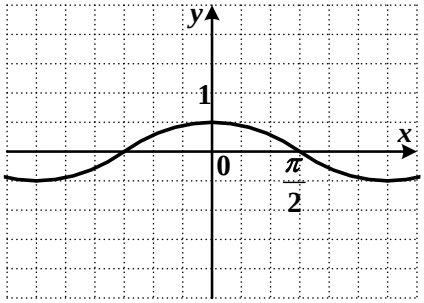
4) 

5. На одном из рисунков изображен эскиз графика функции $y = 2\cos x$. Укажите номер этого рисунка.

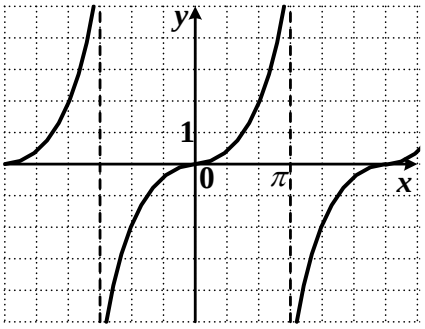
1) 

2) 

3) 

4) 

6. График какой функции изображен на рисунке?



1) $y = \operatorname{tg} x$

2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

3) $y = \operatorname{tg} 2x$

4) $y = \operatorname{ctg} x$

Тест №3 по теме: « Область значения тригонометрических функций»
Вариант №1

1. Укажите множество значений функции $f(x) = 2\cos x - 1$.

1) $[-1;\ 1]$ 2) $[-3;\ 1]$ 3) $[-1;\ 3]$ 4) $[-2;\ 2]$

2. Укажите множество значений функции $f(x) = 5 - 2\cos x$.

1) $[-1;\ 1]$ 2) $[-2;\ 2]$ 3) $(3;\ 7)$ 4) $[3;\ 7]$

3. Укажите множество значений функции $f(x) = 3 - 4\sin x$.

1) $[-1;\ 7]$ 2) $[-7;\ 1]$ 3) $[-4;\ 4]$ 4) $(-1;\ 7)$

4. Укажите наибольшее значение функции $y = \frac{1}{3}\sin 3x + 3$.

1) $3\frac{1}{3}$ 2) $2\frac{2}{3}$ 3) 3 4) 4

5. Какое число <u>не входит</u> в множество значений функции $f(x) = 4 - 2\cos x$?

1) 4 2) 5 3) 6 4) 7

6.Какое число входит в множество значений функции $f(x) = 2\cos x + 5$?

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

7. Укажите наибольшее значение функции $y = 0{,}5 - 0{,}5\cos 2x$.

1) 1,5 2) 1 3) 0,5 4) 0

8. Укажите наименьшее значение функции $y = 3\sin 2x - 5$.

1) – 5 2) – 11 3) – 2 4) – 8

9. Укажите наименьшее значение функции $y = -1{,}5 + \sin 5x$.

1) – 6,5 2) – 2,5 3) – 0,5 4) – 1,5

10. Найдите множество значений функции $y = -3\sin 5x - 0{,}1$.

1) $[-3{,}1;\ 2{,}9]$
2) $[-2{,}9;\ 3{,}1]$
3) $[-1;\ 1]$
4) $[-3;\ 3]$

Тест №3 по теме: « Область значения тригонометрических функций»
Вариант №2

1. Укажите множество значений функции $f(x) = 6\sin x - 2$.

1) $[-3;\ -1]$ 2) $[-6;\ 6]$ 3) $[-8;\ 4]$ 4) $(-8;\ 4)$

2. Укажите множество значений функции $f(x) = 5 - 4\sin x$.

1) $[-1;\ 1]$
2) $[1;\ 9]$
3) $(-\infty;\ +\infty)$
4) $[4;\ 5]$

3. Укажите множество значений функции $y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\cos x$.

1) $[2/3;\ 2]$ 2) $[2/3;\ 4/3]$ 3) $[-2/3;\ 4/3]$ 4) $[-2/3;\ 2]$

4. Укажите множество значений функции $f(x) = -2\sin x - 7$.

1) $[5;\ 9]$
2) $[2;\ 7]$
3) $[-1;\ 1]$
4) $[-9;\ -5]$

5. Какое число <u>не входит</u> в множество значений функции $f(x) = 6 - 5\sin x$?

1) 1 2) 12 3) 2 4) 11

6. Какое число входит в множество значений функции $f(x) = 2 - 9\sin x$?

1) 15 2) 20 3) − 5 4) − 10

7. Укажите наибольшее значение функции $y = -0{,}5 - \cos\frac{1}{2}x$.

1) $0{,}5$ 2) 1 3) – 0,5 4) – 1,5

8. Укажите наименьшее значение функции $y = 3 - \frac{1}{2}\sin 2x$.

1) 3 2) 2,5 3) 3,5 4) 2

9. Укажите наименьшее значение функции $y = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cos x$.

1) $-2{,}5$ 2) -1 3) -2 4) -3

10. Найдите множество значений функции $y = 5\sin 3x - 1{,}5$.

1) $[-6{,}5;\ 3{,}5]$ 3) $[-3{,}5;\ 6{,}5]$

2) $[-5;\ 5]$ 4) $[-1{,}5;\ 1{,}5]$

Раздел №2

Тест №1: «Простейшие тригонометрические уравнения»

Вариант №1

1. Решите уравнение $\sin 2x = 0{,}5$.

1) $\pm\frac{\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in Z$ 3) $\pm\frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z$

2) $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\pi k,\ k \in Z$ 4) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

2. Решите уравнение $\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$.

1) $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n,\ n \in Z$ 3) $-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n,\ n \in Z$

2) $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}n,\ n \in Z$ 4) $-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}n,\ n \in Z$

3. Решите уравнение $\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) $\pm\frac{\pi}{2} + 4\pi k,\ k \in Z$ 3) $\pm\frac{3\pi}{2} + 4\pi k,\ k \in Z$

2) $(-1)^k \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ 4) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

4. Решите уравнение $\sin\frac{1}{3}x = -1$.

1) $6\pi k,\ k \in Z$ 3) $\frac{3\pi}{2} + 6\pi k,\ k \in Z$

2) $(-1)^k \frac{3\pi}{2} + 3\pi k,\ k \in Z$ 4) $-\frac{3\pi}{2} + 6\pi k,\ k \in Z$

5. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x = 1$.

1) $\frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in Z$ 3) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$

2) $-\frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in Z$ 4) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$

Тест №1: «Простейшие тригонометрические уравнения»

Вариант №2

1. Решите уравнение $\cos\frac{1}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) $\pm\frac{\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z$

2) $(-1)^k\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

3) $\pm\frac{3\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z$

4) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

2. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{3}=-\sqrt{3}$.

1) $-\frac{\pi}{2}+3\pi n,\ n\in Z$

2) $\frac{\pi}{2}+3\pi n,\ n\in Z$

3) $\pi+3\pi n,\ n\in Z$

4) $-\pi+3\pi n,\ n\in Z$

3. Решите уравнение $\sin 2x=-0,5$.

1) $\pm\frac{\pi}{3}+4\pi k,\ k\in Z$

2) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\pi k,\ k\in Z$

3) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in Z$

4) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

4. Решите уравнение $\operatorname{tg}4x+1=0$.

1) $-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}n,\ n\in Z$

2) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}n,\ n\in Z$

3) $-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$

4) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$

5. Решите уравнение $\sin 2x=1$.

1) $\pi k,\ k\in Z$

2) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

3) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

4) $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$

Тест №2 по теме: « Простейшие тригонометрические уравнения»

Вариант №1

1. Решите уравнение $-2\cos x=0$.

1) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

2) $2\pi k,\ k\in Z$

3) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

4) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$

2. Решите уравнение $3\sin x-3=0$.

1) $2\pi k,\ k\in Z$

2) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

3) $\pi k,\ k\in Z$

4) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

3. Решите уравнение $9\cos x-9=0$.

1) $\pi k,\ k\in Z$

2) $2\pi k,\ k\in Z$

3) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

4) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$

4. Решите уравнение $7-6\sin x=7$.

1) $2\pi k,\ k\in Z$

2) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

3) $\pi k,\ k\in Z$

4) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

5. Решите уравнение $\sin 2x=1$.

1) $\pi k,\ k\in Z$

2) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

3) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

4) $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$

6. Решите уравнение $\sin 2x=0{,}5$.

1) $\pm\frac{\pi}{3}+4\pi k,\ k\in Z$

2) $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\pi k,\ k\in Z$

3) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in Z$

4) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

7. Решите уравнение $2\cos x-1=0$.

1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

2) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$

3) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$

4) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$

8. Решите уравнение $2\cos x+\sqrt{3}=0$.

1) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$

2) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$

3) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

4) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$

9. Решите уравнение $2\sin x-\sqrt{2}=0$.

1) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$

2) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

3) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$

4) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

10. Решите уравнение $\cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) $\pm\frac{\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z$

2) $(-1)^k\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

3) $\pm\frac{3\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z$

4) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

Тест №2 по теме: « Простейшие тригонометрические уравнения»

Вариант №2

1. Решите уравнение $3\sin x=0$.

1) $\pi k,\ k\in Z$

2) $2\pi k,\ k\in Z$

3) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

4) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$

2. Решите уравнение $4\cos x+4=0$.

1) $2\pi k,\ k\in Z$

2) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

3) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$

4) $\pi k,\ k\in Z$

3. Решите уравнение $6+6\sin x=0$.

1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$ 3) $\pi k,\ k\in Z$

2) $2\pi k,\ k\in Z$ 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

4. Решите уравнение $-9\cos x+4=4$.

1) $2\pi k,\ k\in Z$ 3) $\pi k,\ k\in Z$

2) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

5. Решите уравнение $\sin\frac{1}{3}x=-1$.

1) $6\pi k,\ k\in Z$ 3) $\frac{3\pi}{2}+6\pi k,\ k\in Z$

2) $(-1)^k\frac{3\pi}{2}+3\pi k,\ k\in Z$ 4) $-\frac{3\pi}{2}+6\pi k,\ k\in Z$

6. Решите уравнение $\sin 2x=-0,5$.

1) $\pm\frac{\pi}{3}+4\pi k,\ k\in Z$ 3) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in Z$

2) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\pi k,\ k\in Z$ 4) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

7. Решите уравнение $2\sin x-1=0$.

1) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$ 3) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$

2) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$ 4) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$

8. Решите уравнение $2\sin x-\sqrt{3}=0$.

1) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$ 3) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

2) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$ 4) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$

9. Решите уравнение $2\sin x+\sqrt{2}=0$.

1) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$ 3) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$

2) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$ 4) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$

10. Решите уравнение $\cos\frac{1}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) $\pm\frac{\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z$ 3) $\pm\frac{3\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z$

2) $(-1)^k\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$ 4) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

Раздел №3

Тест №1 по теме: «Формулы сложения»
Вариант №1

1. Упростите выражение $\sin 2\alpha\cdot\cos 3\alpha-\cos 2\alpha\cdot\sin 3\alpha-\sin\alpha$.

1) $\cos\alpha-\sin\alpha$ 2) 0 3) $-2\sin\alpha$ 4) $\sin 5\alpha-\sin\alpha$

2. Упростите выражение $\sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha - \cos 2\alpha \cdot \cos 3\alpha + \cos 5\alpha$.

1) $2\cos 5\alpha$ 2) $\sin 5\alpha + \cos 5\alpha$ 3) $\cos \alpha + \cos 5\alpha$ 4) 0

3. Упростите выражение $\sin\frac{2\pi}{15} \cdot \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{15} \cdot \sin\frac{\pi}{5}$.

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $-\sin\frac{\pi}{15}$ 4) $\cos\frac{\pi}{15}$

4. Упростите выражение $\cos\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{\pi}{42} - \sin\frac{\pi}{7} \cdot \sin\frac{\pi}{42}$.

1) $\cos\frac{5\pi}{42}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $-\sin\frac{5\pi}{42}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Упростите выражение $\sin\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{21} + \cos\frac{\pi}{7} \cdot \sin\frac{4\pi}{21}$.

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $-\sin\frac{\pi}{21}$ 4) $\cos\frac{\pi}{21}$

6.Упростите выражение $\cos 54^{o} \cdot \cos 9^{o} + \sin 54^{o} \cdot \sin 9^{o}$.

1) $\cos 63^{o}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\sin 63^{o}$

7. Упростите выражение $\sin 12^{o} \cdot \cos 18^{o} + \cos 12^{o} \cdot \sin 18^{o}$.

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $-\sin 6^{o}$ 4) $\cos 6^{o}$

8. Упростите выражение $\sin x \sin 2x - \sin 3x - \cos x \cos 2x$.

1) $\cos 3x - \sin 3x$ 3) $-\cos 3x - \sin 3x$

2) $\cos x - \sin 3x$ 4) 0

9. Упростите выражение $\cos x \sin 2x + \sin x - \cos 2x \sin x$.

1) $2\sin x$ 3) $\sin x - \sin 3x$

2) $\sin 3x - \sin x$ 4) 0

10. Упростите выражение $\cos\frac{1}{3}x \cos\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{2}{3}x \sin\frac{x}{3}$.

1) $\cos\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$ 3) $\sin x - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$

2) $\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$ 4) $\sin\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$

Тест №1 по теме: «Формулы сложения»

Вариант №2

1.Упростите выражение $\sin 7\alpha \cdot \sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot \cos 7\alpha - \cos 11\alpha$.

1) $\cos 3\alpha - \cos 11\alpha$ 2) $\sin 11\alpha - \cos 11\alpha$ 3) 0 4) $-2\cos 11\alpha$

2.Упростите выражение $\sin 7\alpha \cdot \cos 4\alpha + \sin 4\alpha \cdot \cos 7\alpha - 3\sin 11\alpha$

.

1) $\cos 3\alpha - 3\sin 11\alpha$ 2) $-2\sin 11\alpha$ 3) $-4\sin 11\alpha$ 4) $\sin 3\alpha - 3\sin 11\alpha$

3.Упростите выражение $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\sin\frac{5\pi}{12}$ 4) $\cos\frac{5\pi}{12}$

4.Упростите выражение $\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{42} + \sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{5\pi}{42}$.

1) $\cos\frac{17\pi}{42}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\sin\frac{17\pi}{42}$

5.Упростите выражение $\sin\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{15} - \cos\frac{2\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{15}$.

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\sin\frac{7\pi}{15}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\cos\frac{7\pi}{15}$

6.Упростите выражение $\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{20} - \sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{20}$.

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\cos\frac{3\pi}{20}$ 3) $\sin\frac{3\pi}{20}$ 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7.Упростите выражение $\sin 123^{o}\cdot\cos 33^{o} - \cos 123^{o}\cdot\sin 33^{o}$.

1) 0 2) $\sin 156^{o}$ 3) 1 4) $\cos 156^{o}$

8.Упростите выражение $\sin 2x\cos 3x - 2\sin 5x + \cos 2x\sin 3x$.

1) $-3\sin 5x$
2) $\sin x - 2\sin 5x$
3) $-\sin 5x$
4) $-\sin x - 2\sin 5x$

9.Упростите выражение $\cos 2{,}5x\cos 1{,}5x + \cos x + \sin 1{,}5x\sin 2{,}5x$.

1) $2\cos x$
2) $\sin x + \cos x$
3) $\cos 4x + \cos x$
4) $\sin 4x + \cos x$

10.Упростите выражение $2(\cos 4x\cdot\cos 7x + \sin 2x) + 2\cdot\sin 4x\cdot\sin 7x$.

1) $2\cos 3x + 2\sin 2x$
2) $-2\cos 3x + 2\sin 2x$
3) $\cos 11x + 2\sin 2x$
4) $2\cos 11x + 2\sin 2x$

Тест №2 по теме: « Формулы приведения»

Вариант №1

1. Вычислите: $\sin\left(180^{\circ}-60^{\circ}\right)+\cos\left(270^{\circ}+30^{\circ}\right)$.

1) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

2. Вычислите: $\cos\left(360^{\circ}-60^{\circ}\right)+\cos\left(270^{\circ}+60^{\circ}\right)$.

1) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 2) 1 3) – 1 4) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

3. Вычислите: $\cos\left(270^{\circ}+60^{\circ}\right)+\cos\left(180^{\circ}-60^{\circ}\right)$.

1) $\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 3) $\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

4. Вычислите: $\sin\left(360^{\circ}-45^{\circ}\right)+\cos\left(270^{\circ}+45^{\circ}\right)$.

1) $-\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) 0 4) 1

5. Вычислите: $\sin\left(90^{\circ}+60^{\circ}\right)+\sin\left(270^{\circ}-30^{\circ}\right)$.

1) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

6. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

1) 0 2) 1 3) – 1 4) 0,5

7. Найдите значение выражения $-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\pi-\alpha)+\sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$, если $\alpha=-\frac{\pi}{4}$.

1) 1,5 2) 0,5 3) – 0,5 4) – 1,5

8.Найдите значение выражения $\frac{7}{2}\sin(2\pi+\alpha)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\alpha=\frac{5\pi}{6}$.

1) $-\frac{5}{4}$ 2) $\frac{9}{4}$ 3) $\frac{5}{4}$ 4) $\frac{5}{2}$

9. Найдите значение выражения $3\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\frac{1}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\alpha=\frac{5\pi}{2}$.

1) $\frac{16}{5}$ 2) $-\frac{16}{5}$ 3) $\frac{14}{5}$ 4) $-\frac{14}{5}$

10. Найдите значение выражения $\sqrt{3}\cos(\pi-\alpha)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

1) – 2 2) – 1 3) 2 4) 1

Тест №2 по теме: « Формулы приведения»
Вариант №2

1. Вычислите: $\sin\left(180^{o}-30^{o}\right)+\cos\left(360^{o}+60^{o}\right)$.

1) 0 2) 1 3) $\sqrt{3}$ 4) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2. Вычислите: $\cos\left(180^{o}+60^{o}\right)-\cos\left(90^{o}+60^{o}\right)$.

1) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

3. Вычислите: $\cos\left(90^{o}+30^{o}\right)+\cos\left(360^{o}-60^{o}\right)$.

1) 0 2) 1 3) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

4.Вычислите: $\sin\left(180^{o}-60^{o}\right)+\cos\left(360^{o}+30^{o}\right)$.

1) 0 2) $-\sqrt{3}$ 3) $\sqrt{3}$ 4) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

5. Вычислите: $\cos\left(360^{o}+45^{o}\right)+\cos\left(270^{o}-45^{o}\right)$.

1) $-\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) 0 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. Найдите значение выражения $\frac{3}{4}\sin(2\pi+\alpha)-\sin(3\pi+\alpha)$, если $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

1) $\frac{7\sqrt{2}}{8}$ 2) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ 4) $-\frac{7\sqrt{2}}{8}$

7. Найдите значение выражения $6\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\pi+\alpha)$, если $\alpha=-\frac{\pi}{4}$.

1) $-\frac{13}{2}$ 2) $\frac{11}{2}$ 3) $-\frac{11}{2}$ 4) $\frac{13}{2}$

8. Найдите значение выражения $5\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\cos(\pi-\alpha)$, если $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

1) $-3\sqrt{3}$ 2) $2\sqrt{3}$ 3) $3\sqrt{3}$ 4) $-2\sqrt{3}$

9. Найдите значение выражения $4\cos(\pi+\alpha)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, если $\alpha=7\pi$.

1) – 4,5 2) 3,5 3) 4,5 4) – 3,5

10. Найдите значение выражения $-\frac{1}{2}\cos(\pi-\alpha)-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\alpha=-\frac{\pi}{6}$.

1) $-\sqrt{3}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\sqrt{3}$ 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Тест №3 по теме: «Преобразование тригонометрических выражений»

Вариант №1

1. Вычислите $5-6\cos^2\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{3}{8}$.

1) $-\frac{5}{32}$ 2) $\frac{133}{32}$ 3) $\frac{5}{4}$ 4) $\frac{35}{4}$

2.Вычислите $10\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, если $\cos^2\alpha=\frac{3}{5}$.

1) $\frac{29}{5}$ 2) $\frac{28}{5}$ 3) $\frac{32}{5}$ 4) $\frac{18}{5}$

3.Вычислите $8-14\cos^2\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{7}$.

1) $\frac{152}{7}$ 2) $-\frac{40}{7}$ 3) -4 4) $\frac{54}{7}$

4. Вычислите $9\sin^2\alpha-4$, если $\cos\alpha=-\frac{2}{9}$.

1) $-\frac{40}{9}$ 2) $\frac{41}{9}$ 3) $-\frac{32}{9}$ 4) -11

5. Вычислите $\sin^2\alpha-5\cos^2\alpha$, если $\sin^2\alpha=\frac{5}{6}$.

1) $-\frac{5}{6}$ 2) 0 3) -4 4) $-\frac{31}{9}$

6. Вычислите $4\sin^2\alpha-12\cos^2\alpha$, если $\sin^2\alpha=\frac{3}{8}$.

1) -15 2) -6 3) -2 4) $-\frac{33}{8}$

7. Вычислите $5\sin^2\alpha-1$, если $\cos\alpha=\frac{1}{4}$.

1) $\frac{11}{4}$ 2) $\frac{59}{16}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $-\frac{11}{16}$

8. Вычислите $5-3\cos^2\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{6}$.

1) $\frac{3}{2}$ 2) $\frac{5}{2}$ 3) $\frac{23}{12}$ 4) $\frac{25}{12}$

9. Вычислите $5\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha$, если $\cos^2\alpha=\frac{1}{3}$.

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{7}{3}$ 3) $\frac{37}{9}$ 4) $-\frac{1}{3}$

10. Вычислите $2\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha$, если $\sin^2\alpha = \frac{3}{11}$.

1) $\frac{16}{11}$ 2) $\frac{188}{121}$ 3) $-\frac{26}{11}$ 4) $\frac{4}{11}$

Тест №3 по теме: «Преобразование тригонометрических выражений»
Вариант №2

1. Вычислите $5\cos^2\alpha - 1$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$

1) $-\frac{11}{16}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{59}{16}$ 4) $\frac{11}{4}$

2.Вычислите $2\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha$, если $\cos^2\alpha = \frac{2}{7}$.

1) $-\frac{16}{7}$ 2) $-\frac{172}{49}$ 3) $\frac{2}{7}$ 4) $\frac{24}{7}$

3.Вычислите $7 - 5\cos^2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

1) $\frac{19}{5}$ 2) $\frac{26}{5}$ 3) 3 4) $\frac{159}{25}$

4. Вычислите $2\sin^2\alpha + 4$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$.

1) $\frac{152}{25}$ 2) $\frac{148}{25}$ 3) $\frac{32}{5}$ 4) $\frac{28}{5}$

5. Вычислите $7\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$, если $\sin^2\alpha = \frac{3}{4}$.

1) $\frac{5}{2}$ 2) $\frac{11}{2}$ 3) 5 4) 1

6. Вычислите $4\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha$, если $\sin^2\alpha = \frac{2}{3}$.

1) $-\frac{17}{3}$ 2) $\frac{13}{3}$ 3) 1 4) -2

7. Вычислите $4 - 3\cos^2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2}{5}$.

1) $\frac{14}{5}$ 2) $\frac{88}{25}$ 3) $\frac{11}{5}$ 4) $\frac{37}{25}$

8. Вычислите $3 - 2\cos^2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$.

1) $\frac{17}{9}$ 2) $\frac{1}{9}$ 3) $\frac{7}{3}$ 4) $\frac{11}{3}$

9. Вычислите $\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha$, если $\cos^2\alpha = \frac{1}{7}$.

1) $-\frac{17}{7}$ 2) $-\frac{23}{7}$ 3) $-\frac{143}{49}$ 4) $\frac{3}{7}$

10. Вычислите $6\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha$, если $\sin^2\alpha = \frac{2}{7}$.

1) $\frac{22}{7}$ 2) $-\frac{8}{7}$ 3) $\frac{24}{7}$ 4) $\frac{248}{49}$

Тренажер по теме «Площадь фигур»

§1. Задачи по теме «Прямоугольник»

№	Текст задания	Ответы		
		A	B	C
1.	В прямоугольнике одна сторона равна 20, другая сторона равна 24. Найдите площадь прямоугольника.	88	480	68
2.	Найдите площадь прямоугольника, по стороне и диагонали.	1440	98	196
3.	В прямоугольнике периметр равен 72, а одна из его сторон равна 16. Найдите площадь прямоугольника.	88	320	896
4.	В прямоугольнике диагональ равна 32, а угол между ней и одной из сторон равен 60°. Найдите площадь прямоугольника, деленную на √3.	640	256	1920
5.	Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 68 и одна сторона на 4 больше другой.	285	272	1156
6.	Площадь прямоугольника равна 18. Найдите его большую сторону, если она в 2 раза больше меньшей стороны.	9	6	3
7	Одна из сторон прямоугольника равна 30, а площадь равна 480. Найдите диагональ этого прямоугольника.	34	16	510
8.	Найдите площадь прямоугольника, изображенного на рисунке.	350	780	39
9.	Найдите площадь прямоугольника, изображенного на рисунке.	180	580	420
10.	Сторона квадрата равна 21. Найдите площадь квадрата.	42	84	441
11.	Как изменится площадь прямоугольника, если каждую сторону увеличить в два раза?	В 4 раза	В 2 раза	Не измен.
12.	Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 5,5 м и 6 м, нужно покрыть паркетом прямоугольной формы. Длина каждой дощечки паркета равна 30 см, а ширина – 5 см. Сколько потребуется таких дощечек для покрытия пола?	2200	220	22
13.	Сколько потребуется кафельных плиток квадратной формы со стороной 15 см, чтобы облицевать ими стену, имеющую форму прямоугольника со сторонами 3 м и 2,7 м?	36	360	400

§2. Задачи по теме «Параллелограмм»

№	Текст задания	Ответы		
		A	B	C
1.	Одна из сторон параллелограмма равна 31, а опущенная на нее высота равна 7. Найдите площадь параллелограмма.	38	217	76
2	Одна из сторон параллелограмма равна 13, другая равна 20, а один из углов – 45°. Найдите площадь параллелограмма, умноженную на √2.	260	130	57
3.	Стороны параллелограмма равны 9 и 10. Высота, опущенная на первую сторону, равна 14.Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.	266	12,6	33
4.	Площадь параллелограмма равна 65, две его стороны равны 5 и 10. Найдите большую высоту этого параллелограмма.	6,5	13	5
5.	Площадь параллелограмма равна 205, две его высоты равны 5 и 17. Найдите большую сторону этого параллелограмма.	41	12	9
6.	Найдите площадь параллелограмма, изображенного на рисунке.	42	24	70
7.	Смежные стороны параллелограмма равны 12 см и 14 см, а его острый угол равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.	168	56	84
8.	Периметр параллелограмма равен 20 см. Вычислите его площадь, если один из его углов равен 150°, а длина одной из его сторон равна 8 см.	15	8	12
9	Стороны параллелограмма 6см и 9 см. Длина большей высоты параллелограмма 8 см. Найдите его площадь.	48	72	54
10.	Площадь параллелограмма равна 25 см^2. Стороны параллелограмма равны 2а + 3; 3а + 4 см, тогда меньшая высота этого параллелограмма равна:	25: (3а + 4)	25: (2а + 3)	(2а + 3) (3а + 4)

§3. Задачи по теме «Ромб»

№ п/п	Текст задания	Ответы		
		A	B	C
1.	Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 8 и 12.	96	48	40
2.	Периметр ромба равен 72, а один из углов равен 45°. Найдите площадь ромба, деленную на √2.	162	117	27
3.	Найдите сторону ромба, если его площадь равна 72, а острый угол 30°.	24	12	216
4.	Площадь ромба равна 26. Одна из диагоналей равна 4. Найдите другую диагональ.	6,5	13	65
5.	Найдите высоту ромба, если его площадь равна 54, а сторона равна 4.	13,4	216	58
6.	Сторона ромба равна 25, а диагональ – 48. Найдите площадь ромба.	1200	73	336
7.	Найдите площадь ромба, изображенного на рисунке.	14	20	24
8.	Найдите площадь ромба, изображенного на рисунке.	90	60	21
9.	Найдите площадь ромба, если его высота равна 12, а острый угол 30°.	288	360	42
10.	Сторона ромба 8 см, а острый угол 30°. Найдите площадь ромба.	32	240	64

§4. Задачи по теме «Треугольник»

№ п/п	Текст заданий	Ответы		
		A	B	C
1.	Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.	42	70	300
2.	В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 8, а угол, лежащий против него, равен 30°. Найдите площадь треугольника. В ответе напишите площадь, деленную на √3.	32	240	38√3
3.	В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 5, а острый угол, прилежащий к нему, равен 30°. Найдите площадь треугольника. В ответе запишите площадь, умноженную на √3.	150	12,5	50
4.	В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 12, а угол, лежащий напротив него, равен 45°. Найдите площадь треугольника.	72	144	57
5.	Периметр равностороннего треугольника равен 84. Найдите его площадь, деленную на √3.	28	84√3	196
6.	Найдите площадь равностороннего треугольника, высота которого равна 4. В ответе запишите площадь, умноженную на √3.	16	4√3	12
7.	Периметр равнобедренного треугольника равен 36, а боковая сторона – 13. Найдите площадь треугольника.	43	60	468
8.	Периметр равнобедренного треугольника равен 100, а основание – 18. Найдите площадь треугольника.	118	820	180
9.	У треугольника со сторонами 14 и 21 проведены высоты к этим. Высота, проведенная к меньшей стороне, равна 6. Чему равна высота, проведенная к большей стороне?	4	5,8	49
10.	Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 90°. Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равен 450.	540	5	30
11.	Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.	132	264	62
12.	Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.	40	120	60
13.	Найдите площадь прямоугольного треугольника, изображенного на рисунке.	52	315	24,5
14.	Найдите площадь равнобедренного треугольника, изображенного на рисунке.	168	98	200
15.	Найдите площадь равнобедренного треугольника, изображенного на рисунке.	60	42	84

§5. Задачи по теме «Трапеция»

№ п/п	Тексты заданий	Ответы		
		A	B	C
1.	Основания трапеции равны 17 и 22, площадь трапеции равен 390. Найдите высоту трапеции.	10	20	5
2.	Одно из оснований трапеции равно 12, высота равна 6, а площадь трапеции равна 96. Найдите второе основание трапеции.	16	4	20
3.	Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 29, площадь равна 333. Найдите ее высоту.	18	9	15
4.	Основание трапеции равно 23, высота равна 5, а площадь равна 150. Найдите второе основание трапеции.	7	8,3	5
5.	Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а ее периметр равен 30. Найдите площадь трапеции.	30	40	600
6.	Найдите большее основание прямоугольной трапеции, площадь которой равна 48, высота равна 6 и большая боковая сторона составляет с основанием угол 45°.	11	8	42
7.	В равнобокой трапеции основания равны 10 см и 20 см, боковая сторона равна 25 см. Найдите площадь трапеции, деленную на √5.	200	500	40
8.	Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135°, а высота, проведенная из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки 1,4 см и 3,4 см. Найдите площадь трапеции.	13,98	4,76	87
9.	Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 6 см, а больший угол равен 135°.	36	54	129
10.	Основания равнобедренной трапеции равны 6 см и 10 см. Ее острый угол равен 45°. Найдите площадь трапеции.	16	60	30

6. Задачи по теме «Площадь фигур, заданных координатами».

№ п/п	Текст задания	Ответы		
		A	B	C
1.	Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 0), (11; 7), (8;10).	31	27	15
2.	Найдите площадь прямоугольника, вершины которого имеют координаты (1; 0), (10; 0), (1; 10), (10; 10)	90	38	19
3.	Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (-4; -2), (4; -2), (3; 5), (0; 5).	77	38,5	56
4.	Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты (-2; -1), (4; -1), (2; 4), (-4; 4).	30	22	11

тема	тема «Параллелограмм	тема «Ромб»	тема «Треугольник

«Прямоугольник»			
1-В	1-В	1-В	1-В
2-А	2-А	2-А	2-А
3-В	3-В	3-В	3-В
4-В	4-В	4-В	4-А
5-А	5-А	5-А	5-С
6-С	6-А	6-С	6-А
7-А	7-С	7-С	7-В
8-А	8-В	8-А	8-В
9-С	9 - А	9-А	9-А
10-С	10 - В	10-А	10-С
11-А			11-А
12-А			12-С
13-В			13-С
			14-А
			15-А

тема «Трапеция»	тема «Площадь фигур, заданных координатами»
1-В	1-В
2-С	2-А
3-А	3-В
4-А	4-А
5-В	
6-А	
7-А	
8-В	
9-В	
10 - А	

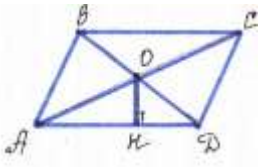
Тематический тренажер для подготовки
К ОГЭ по математике 9 класс.

Тематические тренировочные задания. Отработка заданий: модуль «Геометрия»

Тема №1 «Нахождение углов и площадей многоугольников»

Углы и площади
В-1.

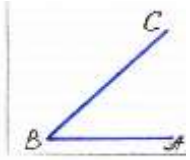
1. Найдите угол ABC, изображенный на рисунке. Ответ дайте в градусах.



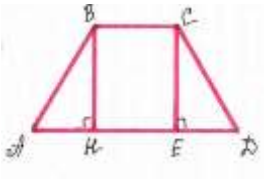
2. Сторона параллелограмма равна 7см, а расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой стороны равно 2см. Найдите площадь параллелограмма.

3.Две стороны треугольника равны 3 и 8, а угол между ними равен 30^0. Найдите площадь треугольника.

Углы и площади.
В-2



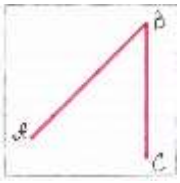
1. Найдите угол ABC, изображенный на рисунке. Ответ дайте в градусах.



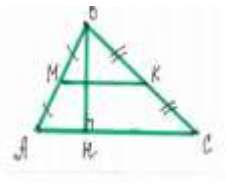
2.Основания равнобедренной трапеции равны 6см и 16см, а боковое ребро равно 13см. Найдите площадь трапеции.

3.В прямоугольном треугольнике один катет равен 7, а другой на 2 больше. Найдите площадь треугольника.

Углы и площади
В-3



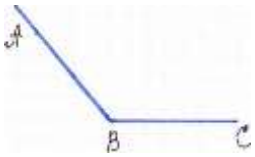
1. Найдите угол ABC, изображенный на рисунке. Ответ дайте в градусах.



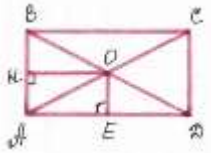
2.Найдите площадь треугольника, если высота, проведенная к одной из сторон, равна 11см, а средняя линия, параллельная этой стороне, равна 10см.

3. Диагонали ромба равны 12 и 7. Найдите его площадь.

Углы и площади.
В-4



1.Найдите угол ABC (в градусах), изображенный на рисунке.

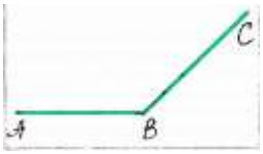
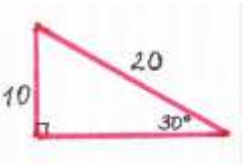
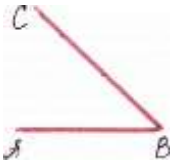
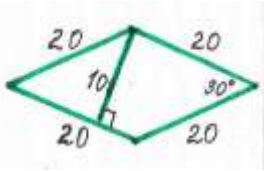
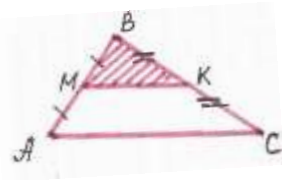
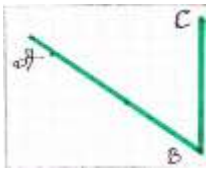
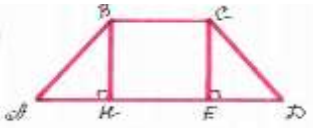


2. Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до двух сторон равны 4см и 5см. Найдите площадь прямоугольника.

3.В ΔABC проведена высота CH. Известно, что AB = 3CH, CH = 3. Найдите площадь треугольника.

Углы и площади

Углы и площади.

В-5	В-6
 **1.** Найдите угол АВС, изображенный на рисунке. Ответ дайте в градусах.  **2.** Найдите площадь прямоугольного треугольника, изображенного на рисунке. **3.**Средняя линия равнобедренной трапеции равна 8, угол при одном из оснований равен 135^0, а боковая сторона 5. Найдите площадь трапеции.	 **1.** Найдите угол АВС, изображенный на рисунке. Ответ дайте в градусах.  **2.**Найдите площадь ромба, изображенного на рисунке. **3.**Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 5см.
Углы и площади В-7	**Углы и площади.** В-8
 **1.**Найдите угол АВС, изображенный на рисунке. Ответ дайте в градусах.  **2.** Средняя линия МК треугольника АВС отсекает от него треугольник МВК, площадь которого равна $10см^2$. Найдите площадь треугольника АВС. **3.** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 29. Один из его катетов равен 21. Найдите площадь треугольника.	 **1.**Найдите угол АВС, изображенный на рисунке. Ответ дайте в градусах.  **2**.В равнобедренной трапеции известны угол А при основании, равный 45^0, высота 5см и меньшее основание 6см. Найдите площадь трапеции. **3.**Диагональ прямоугольника равна 10, а угол между диагоналями равен 60^0. Найдите площадь прямоугольника.

Ответы. Тема № 1 **«Углы и площади».**

В-1. 1. 90^0 2. $28см^2$ 3. 6

В-2. 1. 45^0 2. $132см^2$ 3. 31,5

В-3. 1. 45^0 2. $110см^2$ 3. 42

В-4. 1. 135^0 2. $80см^2$ 3. 13,5

В-5. 1. 135^0 2. $50\sqrt{3}$ 3. $20\sqrt{2}$

В-6. 1. 45^0 2. 200 3.12,5см^2

В-7. 1. 90^0 2. 20см^2 3. 210

В-8. 1. 45^0 2. 55см^2 3. $25\sqrt{3}$

Тематический тренажер для подготовки
к ОГЭ по математике 9 класс.

Тематические тренировочные задания. Отработка заданий: модуль «Геометрия»
Тема «Нахождение углов и сторон многоугольников»

А-9 класс. Тренажер. Тема№1. **Углы.** В-1.	А-9 класс.Тренажер.Тема№1.**Стороны.** В-1
1.В Δ АВСпроведена биссектрисаAL, AL=LB, а∠B=23^0. Найдите ∠C. Ответ дайте в градусах. 2.Найдите тупой угол параллелограмма, если острый угол равен 40^0. Ответ дайте в градусах. 3.В Δ ABC внешний угол при вершине A равен 123^0, а внешний угол при вершине B равен 63^0. Найдите∠C треугольника ABC. Ответ дайте в градусах. 4. Диагональ ромба образует с одной из сторон угол, равный 25^0. Найдите углы ромба.	1. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 3:7, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 117. 2.Найдите меньшую диагональ ромба, стороны которого равны 49, а острый угол равен 60^0. 3.В Δ ABC AC=BC, ∠C=120^0, AC=12. Найдите AB. 4. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 29. Один из его катетов равен 21. Найдите другой катет.
А-9 класс. Тренажер. Тема№1. **Углы.**В-2.	А-9 класс. Тренажер. Тема№1.**Стороны.**В-2
1.Один из углов параллелограмма на 46^0 больше другого. Найдите больший из углов параллелограмма. Ответ дайте в градусах. **2.**В Δ ABC угол при вершине A равен 55^0, AB = BC. Найдите угол при вершине B. Ответ дайте в градусах. **3.**Два угла ромба относятся как 3:7. Найдите больший угол ромба. Ответ дайте в градусах.	1.Диагонали ромба относятся как 2:6. Периметр ромба равен 40. Найдите высоту ромба. 2.Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона. параллелограмма равна 26. Найти его большую сторону. 3.В равностороннем Δ ABC высота

4. Угол А равнобедренной трапеции ABCD равен 76^0. Из точки Dпроведена прямая, которая пересекает прямую ВС в точке К, и CD=CK. Найдите угол CDK. Ответ дайте в градусах.	СНравна $39\sqrt{3}$. Найдите сторону АВ. 4.Средняя линия трапеции равна 25, а меньшее основание равно 17. Найдите большее основание.

А-9 класс. Тренажер. Тема№1. **Углы.** В-3. 1.Сумма двух углов параллелограмма равна 50^0. Найдите один из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах. 2.В Δ АВС проведена высота СН, угол С делится высотой СН на два угла, градусные величины которых равны 55^0 и 66^0. Найдите наименьший из двух оставшихся углов Δ АВС. Ответ дайте в градусах. 3.Диагональ параллелограмма образуют с двумя его сторонами углы 20^0 и 35^0. Найдите больший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах. 4.В параллелограмма ABCDпрямая АС делит угол А пополам. Найдите угол, под которым пересекаются диагонали параллелограмма. Ответ дайте в градусах.	А-9 класс.Тренажер.Тема№1.**Стороны.** В-3 1. Периметр параллелограмма равен 82. Одна сторона параллелограмма на 29 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма. 2.Катеты прямоугольного треугольника равна 27 и $\sqrt{295}$. Найдите гипотенузу. 3.Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 94 и 51. Найдите среднюю линию этой трапеции. 4.В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении 1:2, меньшая его сторона равна 33. Найдите диагональ данного прямоугольника.
А-9 класс. Тренажер. Тема№1. **Углы.**В-4. **1.**Чему равен больший угол равнобедренной трапеции, если известно, что разность противоположных углов равна 68^0. Ответ дайте в градусах. **2.** .В Δ АВС внешний угол при вершине В равен .66^0, АВ=ВС. Найдите угол А треугольника АВС. Ответ дайте в градусах. 3.Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 23^0 и 49^0. Найдите больший угол параллелограмма.	А-9 класс. Тренажер. Тема№1.**Стороны.**В-4 1..Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 1 : 3, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 10. 2.Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 34, отсекает треугольник, периметр которого равен 69. Найдите периметр трапеции. 3.В равнобедренном Δ АВС угол при вершине В равен 120^0, боковая сторона АВ равна 4. Найдите основание АС.

	4.Основания трапеции равны 14 и 42. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

Ответы. Тема № 1 **«Углы».**

В-1. 1. 111^0 2. 140^0 3. 6^0 4. 134^0

В-2. 1. 113^0 2. 55^0 3. 126^0 4. 38^0

В-3. 1. 155^0 2. 24^0 3. 125^0 4. 90^0

В-4. 1. 124^0 2. 33^0 3. 108^0

Ответы. Тема № 1 **«Стороны».**

В-1. 1. 45 2. 49 3. $12\sqrt{3}$ 4. 20

В-2 1. 15 2. 52 3. 78 4. 33

В-3 1. 6 2. 32 3. 94 4. 66

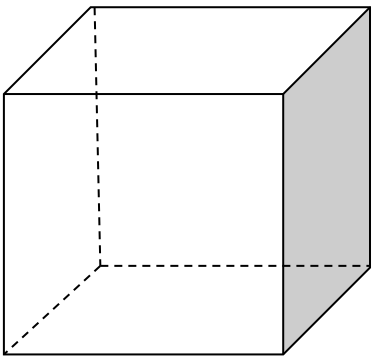
В-4 1. 3 2. 137 3. $4\sqrt{3}$ 4. 21

Задачи-тренажеры по геометрии «Построение угла между прямой и плоскостью и угла между плоскостями».

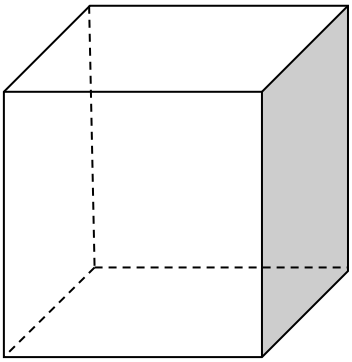
Одной из основных тем в стереометрии является тема: Угол между плоскостями и угол между прямой и плоскостью. При решении задач по этой теме у учащихся возникают возникают затруднения, которые можно преодолеть с помощью системы задач. Обычно такие задачи решаются по готовым рисункам на листах формата А4. На этих же листах записаны и тексты задач к данным рисункам. Листы с задачами вложены в мультифоры, что позволяет их многократно использовать как для индивидуального опроса учащихся, так и на подготовительном этапе при решении более сложных задач.

В процессе решения этих задач у учащихся не только формируются навыки построения, но и идет повторение различных понятий и приемов вычисления.

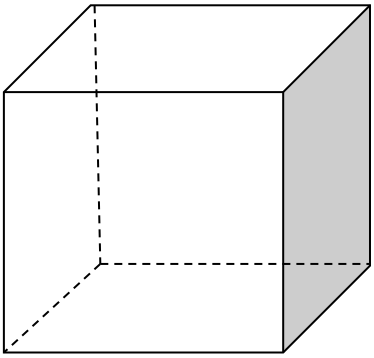
1. $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – куб. Построить угол между прямой $ДД_1$ и плоскостью $АД_1С$.



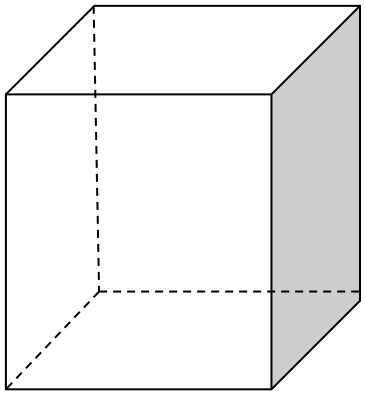
2. $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – куб. Построить угол между прямой $СД_1$ и плоскостью $АС_1С$.



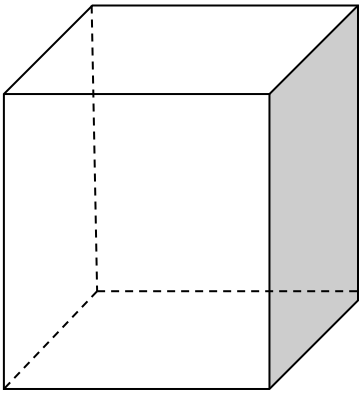
3. $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – куб. Построить угол между плоскостью $АВВ_1$ и плоскостью $АС_1С$



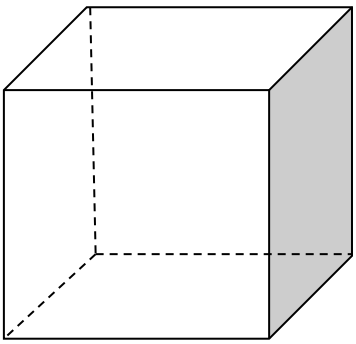
4. $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – куб. Построить угол между плоскостью АВС и плоскостью $АД_1С$.



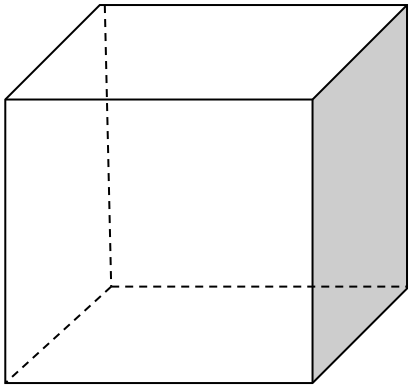
5. $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – прямоугольный параллелепипед. Построить угол между плоскостью $А_1ВС$ и плоскостью АВС



6. $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – куб. Построить угол между плоскостями $ВА_1С_1$ и $ВАD_1$.



7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка N – середина ребра CD .Постройте угол между плоскостями AB_1N и ABC .



8. $ABCДA_1B_1C_1Д_1$ – прямоугольный параллелепипед. Постройте угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.