



***Сборник по математике
«Решение
логарифмических
уравнений и
неравенств»***

Северный район

декабрь 2019 год

Содержание

1. Решение логарифмических уравнений	
1.1. Теоретический материал.....	2
1.2. Примеры решения	8
1.3. Дидактический материал.....	14
2. Решение логарифмических уравнений и неравенств методом рационализации	
2.1. Теоретический материал.....	15
2.2. Примеры решения.....	16
2.3. Дидактический материал.....	22
3. Решение логарифмических неравенств различными способами....	23

1. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Уравнения, решаемые по определению

$$\log_a b = c, a^c = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Пример

$$\log_3(2-x)=2 \quad 2-x>0$$

$$2-x=3^2 \quad x<2$$

$$2-x=9$$

$$-x=6$$

$$x=-6$$

Ответ: $x=-6$

2. Уравнения, решаемые с использованием основных свойств

$$\log_a(bc) = \log_a |b| + \log_a |c|$$

$$\log_a(b/c) = \log_a |b| - \log_a |c|$$

$$\log_a b^p = p \log_a |b|$$

Пример:

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+2)=1 \quad \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x > -2 \end{cases}$$

$$\log_2(x+1)(x+2)=1 \quad x > -1$$

$$(x+1)(x+2)=21$$

$$x^2+3x=0$$

$$x(x+3)=0$$

$$x_1=0 \quad x_2=-3 \text{ (не уд. ОДЗ)}$$

Ответ: $x=0$

3. Метод потенцирования

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > 0, g(x) > 0$$

$$f(x) = g(x)$$

Пример:

$$\lg(x-4) + \lg(x-6) = \lg 8 \quad \begin{cases} x-4 > 0 \\ x-6 > 0 \end{cases}$$

$$\lg(x-4)(x-6)=\lg 8 \quad x>6$$

$$(x-4)(x-6)=8$$

$$x^2-10x+16=0$$

$$x_1=8$$

$$x_2=2 \text{ (не уд. ОДЗ)}$$

Ответ: $x=8$

4.Метод подстановки

а) Уравнения, сводящиеся к квадратным

Пример1:

$$\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0 \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

пусть $\lg x = t, t \in \mathbb{R}$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = 2$$

если $t_1 = 1$, то если $t_2 = 2$, то

$$\lg x = 1 \quad \lg x = 2$$

$$x = 10 \quad x = 100$$

Ответ: $x_1 = 10, x_2 = 100$

Пример 2:

$$\lg^2(10x) = 5 - \lg x \quad x > 0$$

$$(\lg 10 + \lg x)^2 = 5 - \lg x$$

$$1 + 2\lg x + \lg^2 x - 5 - \lg x = 0$$

$$\lg^2 x + 3\lg x - 4 = 0$$

пусть $\lg x = t$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t_1 = 1; \quad t_2 = -4$$

если $t_1 = 1$, то если $t_2 = -4$, то

$$\lg x = 1 \quad \lg x = -4$$

$$x = 10 \quad x = 0,0001$$

Ответ: $x_1 = 10, x_2 = 0,0001$

б) Использование формулы

$$\log_a b = 1 / \log_b a$$

Пример:

$$\log_x(9x^2) \log^2_3 x = 4 \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$(\log_x 9 + \log_x x^2) \log^2_3 x = 4$$

$$(2 \log_x 3 + 2) \log^2_3 x = 4$$

$$(2 / \log_3 x + 2) \log^2_3 x = 4$$

$$\text{пусть } \log_3 x = t \quad (2/t + 2)t^2 = 4$$

$$2t^2 + 2t - 4 = 0$$

$$t_1 = 1; \quad t_2 = -2$$

$$\text{если } t_1 = 1, \text{ то} \quad \text{если } t_2 = -2, \text{ то}$$

$$\log_3 x = 1; \quad x_1 = 3; \quad \log_3 x = -2. \quad x_2 = 1/9.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 3, \quad x_2 = 1/9$$

5. Метод приведения к одному основанию

$$\log_a b = \log_c b / \log_c a$$

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0 \quad a \neq 1, \quad c \neq 1$$

Пример:

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11 \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

$$\log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 11$$

$$\log_2 x + 1/2 \log_2 x + 1/3 \log_2 x = 11$$

$$11/6 \log_2 x = 11$$

$$\log_2 x = 6$$

$$x = 2^6$$

$$x = 64$$

$$\text{Ответ: } x = 64$$

6. Метод логарифмирования

$$\log_a b^p = p \log_a b$$

$$b > 0; \quad a > 0; \quad a \neq 1$$

Пример:

$$x^{(\lg x + 5)/3} = 10^{5 + \lg x} \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

прологарифмируем уравнение по основанию 10

$$\lg x^{(\lg x + 5)/3} = \lg 10^{5 + \lg x}$$

$$((\lg x + 5)/3) \lg x = (5 + \lg x) \lg 10$$

$$1/3(\lg x + 5) \lg x = 5 + \lg x \quad | \cdot 3$$

$$(\lg x + 5) \lg x = 15 + 3 \lg x$$

$$\lg^2 x + 5 \lg x = 15 + 3 \lg x$$

$$\lg^2 x + 2 \lg x - 15 = 0$$

пусть $\lg x = t$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$t_1 = -5; \quad t_2 = 3$$

если $t_1 = -5$, то $\lg x = -5$ если $t_2 = 3$, то $\lg x = 3$

$$x_1 = 0,00001 \qquad x_2 = 1000$$

Ответ: $x_1 = 0,00001$, $x_2 = 1000$

7. Использование специальной формулы

$$a^{\log c b} = b^{\log c a}$$

$b > 0$; $b \neq 1$ $a > 0$; $a \neq 1$;

$c > 0$; $c \neq 1$

Пример:

$$3x^{\log 5 2} + 2^{\log 5 x} = 64 \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

$$3 \cdot 2^{\log 5 x} + 2^{\log 5 x} = 64$$

$$4 \cdot 2^{\log 5 x} = 64 \quad | :4$$

$$2^{\log 5 x} = 16$$

$$2^{\log 5 x} = 2^4$$

$$\log_5 x = 4$$

$$x = 5^4$$

$$x = 625$$

Ответ: $x = 625$

8. Использование свойств монотонности функции

Пример:

$$\log_3(x+1) + \log_4(5x+6) = 3 \quad \text{ОДЗ: } x > -1,2$$

$y = \log_3(x+1)$ - возрастающая функция

$y = \log_4(5x+6)$ - возрастающая функция

3 - const

Сумма двух возрастающих функций равна возрастающей функции.

Используем утверждение: если возр. функция

равна const или убыв. функции, тогда

уравнение имеет один корень, который находится с помощью метода подбора.

Ответ: $x=2$

9.Использование свойств ограниченности функции

Пример:

$$\log_2(17-|\sin 0,5\pi x|) = \sqrt{2x+15-x^2}$$

1) рассмотрим левую часть

т.к. $0 \leq |\sin 0,5\pi x| \leq 1$, то

$$\log_2(17-|\sin 0,5\pi x|) \geq \log_2(17-1) = \log_2 16 = 4 \text{ т.е.}$$

$$0 \leq |\sin 0,5\pi x| \leq 4$$

при $x=1$ - достигается равенство

2) рассмотрим правую часть

$$\sqrt{2x+15-x^2} = \sqrt{16-(x+1)} \leq \sqrt{16} = 4 = \sqrt{16-(x-1)^2}$$

$$\sqrt{2x+15-x^2} \leq 4$$

при $x=1$ – достигается равенство

Ответ: $x=1$

10.Однородные уравнения II степени

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0, y^2 \neq 0$$

$$a(x/y)^2 + b(x/y) + c = 0$$

$$at^2 + bt + c = 0$$

Пример

$$3\log_2^2(x+1) - 4\log_2(2x+1)\log_2(x+1) + \log_2^2(2x+1) = 0$$

Делим на $\log_2^2(2x+1)$ ОДЗ: $x > 1/2$

$$3(\log_2(x+1)/\log_2(2x+1))^2 - 4\log_2(2x+1)\log_2(x+1)/\log_2^2(2x+1) + 1 = 0$$

$$t \quad 3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = 1/3$$

если $t_1 = 1$ то,

$$\log_2(x+1)/\log_2(2x+1) = 1$$

$$\log_2(x+1) = \log_2(2x+1)$$

$$x+1 = 2x+1$$

$$x = 0$$

если $t_2 = 1/3$ то,

$$\log_2(x+1)/\log_2(2x+1) = 1/3$$

$$3\log_2(x+1) = \log_2(2x+1)$$

$$\log_2(x+1)^3 = 2x+1$$

$$x(x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = (-3 + \sqrt{5})/2 \quad x_3 = (-3 - \sqrt{5})/2$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = (-3 + \sqrt{5})/2$ не уд.

11. Уравнения, содержащие неизвестное в основании и показателе степени

Пример:

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_x x^{\sqrt{x}} = \log_x \sqrt{x^x}$$

$$\log_x x^{x^{0,5}} = \log_x (x^{0,5})^x$$

$$\sqrt{x} \log_x x = 0,5 \log_x x$$

$$\sqrt{x} = 0,5x$$

$$\sqrt{x}(1 - 0,5\sqrt{x}) = 0$$

$$\sqrt{x} = 0 \text{ (не уд. ОДЗ)} \quad (1 - 0,5\sqrt{x}) = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

Ответ: $x = 4$

12. Функционально - графический метод

$$(x - 1) = \log_2 x$$

Строим графики функций $y = (x - 1)$ и

$$y = \log_2 x.$$

Ответ: $x = 1$, $x = 2$.

1.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ 1.

Задание №5. Простейшие логарифмические уравнения.

1. Решите уравнение $\log_5(7-x) = \log_5(3-x) + 1$.

Ответ 2.

2. Найдите корень уравнения $2^{\log_8(5x-3)} = 4$.

Ответ: 13,4

3. Найдите корень уравнения $\log_{81} 3^{2x-6} = 2$.

Ответ: 7

Задание №9.

1) Преобразования числовых логарифмических выражений.

1. Найдите значение выражения $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \log_5 25 = 2.$$

Ответ: 2.

2. Найдите значение выражения $\log_5 9 \cdot \log_3 25$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\log_5 9 \cdot \log_3 25 = 2\log_5 3 \cdot 2\log_3 5 = 4\log_5 3 \cdot \frac{1}{\log_5 3} = 4.$$

Ответ: 4.

3. Найдите значение выражения $\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 \frac{50}{2}} = 9^2 = 81.$$

Ответ: 81.

4. Найдите значение выражения $(1 - \log_2 12)(1 - \log_6 12)$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$(1 - \log_2 12)(1 - \log_6 12) = (1 - \log_2 2 \cdot 6)(1 - \log_6 2 \cdot 6) = (1 - 1 - \log_2 6)(1 - \log_6 2 - 1) =$$

Ответ: 1.

5. Найдите значение выражения $\frac{\log_3 18}{2 + \log_3 2}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{\log_3 18}{2 + \log_3 2} = \frac{\log_3 (9 \cdot 2)}{2 + \log_3 2} = \frac{\log_3 9 + \log_3 2}{2 + \log_3 2} = \frac{2 + \log_3 2}{2 + \log_3 2} = 1.$$

Ответ: 1.

6. Найдите значение выражения $\frac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0,2$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0,2 = \log_7 5 + \log_7 0,2 = \log_7 1 = 0.$$

Ответ: 0.

7. Найдите значение выражения $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25$.

Решение.

Используем формулу

$$\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$$

.Имеем:

$$\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25 = \log_{0,8} 1,25 \cdot \log_3 3 = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = -1.$$

Ответ: -1.

8. Найдите значение выражения $3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}} = 7 + (7^{\log_7 \sqrt{13}})^2 = 7 + (\sqrt{13})^2 = 7 + 13 = 20.$$

Ответ: 20.

2) Преобразования буквенных логарифмических выражений

1. Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{7}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\log_a(ab^3) = \log_a a + 3\log_a b = 1 + \frac{3}{\log_b a} = 1 + 21 = 22.$$

Ответ: 22.

2. Найдите $\log_a \frac{a}{b^3}$, если $\log_a b = 5$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\log_a \frac{a}{b^3} = \log_a a - 3\log_a b = 1 - 3 \cdot 5 = -14.$$

Ответ: -14.

3. Найдите $\log_a(a^2 b^3)$, если $\log_a b = -2$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\log_a(a^2 b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2\log_a a + 3\log_a b = -4.$$

Ответ: -4.

4. Найдите $\log_a \frac{a^6}{b^4}$, если $\log_a b = -2$.

Решение.

Найдите $\log_a \frac{a^6}{b^4}$, если $\log_a b = -2$.

$$\log_a \frac{a^6}{b^4} = 6\log_a a - 4\log_a b = 6 - 4 \cdot (-2) = 14.$$

Ответ: 14.

ЧАСТЬ 2.

ЗАДАНИЕ №13 Логарифмические уравнения.

1. а) Решите уравнение $1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1; \frac{8}{9}\right]$.

Решение.

а) Заметим, что уравнение определено при любом x . Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_2(9x^2 + 5) = \log_2(8x^4 + 14) - \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(9x^2 + 5) = \log_2(4x^4 + 7) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9x^2 + 5 = 4x^4 + 7 \Leftrightarrow 4x^4 - 9x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0.$$

Значит, либо $4x^2 - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$ или $x = -\frac{1}{2}$, либо $x^2 - 2 = 0$, откуда $x = \sqrt{2}$ или $x = -\sqrt{2}$.

б) Поскольку $-\sqrt{2} < -1 < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{8}{9} < \sqrt{2}$, отрезку $\left[-1; \frac{8}{9}\right]$ принадлежат корни $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: а) $x = \pm\sqrt{2}, x = \pm\frac{1}{2}$; б) $\pm\frac{1}{2}$.

1. Метод подстановки.

$$\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0 \quad x > 0$$

пусть $\lg x = t, t \in \mathbb{R}$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = 2$$

если $t_1 = 1$, то если $t_2 = 2$, то

$$\lg x = 1 \quad \lg x = 2$$

$$x = 10 \quad x = 100$$

Ответ: $x_1 = 10, x_2 = 100$

2. Использование формул: $\log_a b = 1 / \log_b a$

$$\log_x(9x^2) \log_{3x}^2 x = 4 \quad \underline{\text{ОДЗ:}} \quad x > 0$$

$$(\log_x 9 + \log_x x^2) \log_3^2 x = 4 \quad x \neq 1$$

$$(2 \log_x 3 + 2) \log_3^2 x = 4$$

$$(2/\log_3 x + 2) \log_3^2 x = 4$$

$$\text{пусть } \log_3 x = t \quad (2/t + 2)t^2 = 4$$

$$2t^2 + 2t - 4 = 0$$

$$t_1 = 1; \quad t_2 = -2$$

$$\text{если } t_1 = 1, \text{ то} \quad \text{если } t_2 = -2, \text{ то}$$

$$\log_3 x = 1; \quad x_1 = 3; \quad \log_3 x = -2. \quad x_2 = 1/9.$$

$$\underline{\text{Ответ:}} \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 1/9$$

3. Метод приведения к одному основанию: $\log_a b = \log_c b / \log_c a$

$$a > 0, b > 0, c > 0 \quad a \neq 1, c \neq 1$$

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11 \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

$$\log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 11$$

$$\log_2 x + 1/2 \log_2 x + 1/3 \log_2 x = 11$$

$$11/6 \log_2 x = 11$$

$$\log_2 x = 6$$

$$x = 2^6$$

$$x = 64$$

$$\underline{\text{Ответ:}} \quad x = 64$$

4. Метод логарифмирования: $\log_a b^p = p \log_a b \quad b > 0; a > 0; a \neq 1$

$$x^{(\lg x + 5)/3} = 10^{5 + \lg x} \quad \underline{\text{ОДЗ:}} \quad x > 0$$

прологарифмируем уравнение по основанию 10

$$\lg x^{(\lg x + 5)/3} = \lg 10^{5 + \lg x}$$

$$((\lg x + 5)/3) \lg x = (5 + \lg x) \lg 10$$

$$1/3 (\lg x + 5) \lg x = 5 + \lg x \quad *3$$

$$(\lg x + 5) \lg x = 15 + 3 \lg x$$

$$\lg^2 x + 5 \lg x = 15 + 3 \lg x$$

$$\lg^2 x + 2 \lg x - 15 = 0$$

$$\text{пусть } \lg x = t$$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$t_1=-5; \quad t_2=3$$

если $t_1=-5$, то $\lg x=-5$ если $t_2=3$, то $\lg x=3$

$$x_1=0,00001 \qquad x_2=1000$$

Ответ: $x_1=0,00001$, $x_2=1000$

5. Использование специальной формулы: $a^{\log cb} = b^{\log ca}$

$b>0; b \neq 1$ $a>0; a \neq 1; c>0; c \neq 1$

$$3x^{\log 5 2} + 2^{\log 5 x} = 64 \quad \text{ОДЗ: } x>0$$

$$3 \cdot 2^{\log 5 x} + 2^{\log 5 x} = 64$$

$$4 \cdot 2^{\log 5 x} = 64 \quad |:4$$

$$2^{\log 5 x} = 16$$

$$2^{\log 5 x} = 2^4$$

$$\log_5 x = 4$$

$$x = 5^4$$

$$x = 625$$

Ответ: $x=625$

6. Использование свойств монотонности функции

$$\log_3(x+1) + \log_4(5x+6) = 3 \quad \text{ОДЗ: } x > -1,2$$

$y = \log_3(x+1)$ - возрастающая функция

$y = \log_4(5x+6)$ - возрастающая функция

3 - const

Сумма двух возрастающих функций равна возрастающей функции.

Используем утверждение: если возр. функция

равна const или убыв. функции, тогда

уравнение имеет один корень, который находится с

помощью метода подбора.

Ответ: $x=2$

7. Однородные уравнения II степени: $ax^2 + bxy + cy^2 = 0 | : y^2 \neq 0$

$$a(x/y)^2 + b(x/y) + c = 0 \quad at^2 + bt + c = 0$$

$$3\log_2^2(x+1) - 4\log_2(2x+1)\log_2(x+1) + \log_2^2(2x+1) = 0$$

$$\text{Делим на } \log_2^2(2x+1) \quad \text{ОДЗ: } x > 1/2$$

$$3(\log_2(x+1)/\log_2(2x+1))^2 - 4\log_2(2x+1)\log_2(x+1)/\log_2^2(2x+1) + 1 = 0$$

$$\text{ЗАМЕНА } \log_2(x+1)/\log_2(2x+1) = t$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = 1/3$$

если $t_1 = 1$ то,

если $t_2 = 1/3$ то,

$$\log_2(x+1)/\log_2(2x+1) = 1$$

$$\log_2(x+1)/\log_2(2x+1) = 1/3$$

$$\log_2(x+1) = \log_2(2x+1)$$

$$3\log_2(x+1) = \log_2(2x+1)$$

$$x+1 = 2x+1$$

$$\log_2(x+1)^3 = 2x+1$$

$$x = 0$$

$$x(x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ — не уд. } x_2 = (-3 + \sqrt{5})/2 \quad x_3 = (-3 - \sqrt{5})/2 \text{ — не уд.}$$

$$\text{Ответ: } x = (-3 + \sqrt{5})/2$$

1.3. ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. а) Решите уравнение $1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1; \frac{8}{9}\right]$.

2. Решите уравнение: $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$

3. Решите уравнение: $\log_x(9x^2)\log_3^2 x = 4$

4. Решите уравнения: $x^{(\lg x + 5)/3} = 10^{5 + \lg x}$

5. Решите уравнение: $\lg x^{(\lg x + 5)/3} = \lg 10^{5 + \lg x}$

6. Решите уравнение: $3x^{\log 5^2} + 2^{\log 5^x} = 64$

7. Решите уравнение: $\log_3(x+1) + \log_4(5x+6) = 3$

8. Решите уравнение: $3\log_2^2(x+1) - 4\log_2(2x+1)\log_2(x+1) + \log_2^2(2x+1) = 0$

9. $\lg(x^2 - 2x) = \lg 30 - 1$;

10. $\lg(x^2 + 2x - 3) = \lg(6x - 2)$;

11. $\log_3 X \cdot \log_2 x = 4 \log_3 2$;

12. $\log_3 X + \log_9 X + \log_{27} X = 1/12$;

13. $\log_5(X - 10) - \log_5(X + 2) = -1$;

14. $3 + 2\log X + 13 = 2\log 3(X + 1)$.

2. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

2.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Метод рационализации позволяет перейти от неравенства, содержащего сложные показательные, логарифмические и т.п. выражения, к равносильному ему более простому рациональному неравенству.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

$$\log_a f - \log_a g \vee 0 \sim (a - 1)(f - g) \vee 0 \text{ на ОДЗ}$$

Если мы имеем дело с постоянным основанием логарифма, то множитель $a-1$ принимает положительный знак при $a > 1$ и отрицательный при $0 < a < 1$, что позволяет отвлечься от вида монотонности логарифмической функции при определении знака неравенства.

При переменном основании логарифма этот множитель имеет ту же роль, что позволяет избавиться решение от перебора возможных случаев.

В случае переменного основания логарифма можно избавиться от явного перебора случаев, перейдя к новому, постоянному основанию:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

К неравенствам вида $(\log_a f - \log_a g) \cdot h \vee 0$

также применим метод замены множителя:

пусть $a > 0$, тогда множитель $\log_a f - \log_a g$

можно заменить множителем $f - g$

Того же знака при дополнительных условиях $f, g > 0$

Важный частный случай этой замены получается при подстановке в ней

$g = 1$:

пусть $a > 0$, тогда множитель $\log_a f$

Можно заменить множителем $f - 1$ при $f > 0$

В случае $0 < a < 1$ множитель $\log_a f - \log_a g$

можно заменить противоположным множителем $g - f$ при $f, g > 0$, а

множитель $\log_a f$ - противоположным множителем $1 - f$ при $f > 0$

Логарифмические уравнения и неравенства

При условии $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $a(x) > 0$, $a(x) \neq 1$, $h(x) > 0$, $h(x) \neq 1$, $p(x) > 0$, $p(x) \neq 1$ выполняются следующие переходы:		
1	$\log_a f(x) = \log_a g(x)$	$f(x) = g(x)$
2	$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$	$f(x) = g(x)$
3	$\log_a f(x) > 0$ или $(< 0; \geq 0; \leq 0)$	$(a - 1)(f(x) - 1) > 0$ или $(< 0; \geq 0; \leq 0)$
4	$\log_{a(x)} f(x) > 0$ или $(< 0; \geq 0; \leq 0)$	$(a(x) - 1)(f(x) - 1) > 0$ или $(< 0; \geq 0; \leq 0)$
5	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ или $(<; \geq; \leq)$	$(a - 1)(f(x) - g(x)) > 0$ или $(< 0; \geq 0; \leq 0)$
6	$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$ или $(<; \geq; \leq)$	$(a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0$ или $(< 0; \geq 0; \leq 0)$
7	$\log_{h(x)} a(x) - \log_{p(x)} a(x) > 0$ или $(< 0; \geq 0; \leq 0)$	$(a(x) - 1)(h(x) - 1)(p(x) - 1)(p(x) - h(x)) > 0$ или $(< 0; \geq 0; \leq 0)$
8	$\log_{h(x)} f(x) \cdot \log_{p(x)} g(x) > 0$ или $(< 0; \geq 0; \leq 0)$	$\frac{(f(x) - 1)(g(x) - 1)}{(h(x) - 1)(p(x) - 1)} > 0$ или $(< 0; \geq 0; \leq 0)$
9	$\frac{\log_{h(x)} f(x)}{\log_{p(x)} g(x)} > 0$ или $(< 0; \geq 0; \leq 0)$	$\frac{(f(x) - 1)}{(g(x) - 1)(h(x) - 1)(p(x) - 1)} > 0$ или $(< 0; \geq 0; \leq 0)$

2.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ

Пример 1. Решить неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1$$

Решение.

$$\log_{2x+3} x^2 < 1$$

$$\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3} (2x+3);$$

$$\text{ОДЗ. } \begin{cases} 2x+3 > 0, \\ 2x+3 \neq 1, \\ x^2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x+2)(x+1)(x-3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2}; \\ x \neq -1; \\ x \neq 0. \end{cases} \quad 17 \quad \begin{cases} (x+1)^2(x-3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2}; \\ x \neq -1; \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-\frac{3}{2}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$.

Пример 2. Решите неравенство:

$$\log_{0.25x^2} \left(\frac{x+6}{4} \right) \leq 1.$$

Область допустимых значений данного неравенства определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} 0.25x^2 > 0 \\ 0.25x^2 \neq 1 \\ \frac{x+6}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2, x \neq -2 \\ x > -6. \end{cases}$$

Итак, область допустимых значений задаётся следующим промежутком:

$$x \in (-6; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty).$$

Представим единицу справа в виде логарифма с основанием $0.25x^2$ и перенесём его в левую сторону неравенства:

$$\log_{0.25x^2} \left(\frac{x+6}{4} \right) - \log_{0.25x^2} (0.25x^2) \leq 0.$$

Воспользуемся методом рационализации. В области допустимых значений данное неравенство можно заменить следующим:

$$(0.25x^2 - 1) \left(\frac{x+6}{4} - 0.25x^2 \right) \leq 0.$$

Умножим обе части на -4, поменяв при этом знак неравенства:

$$(0.25x^2 - 1)(x^2 - x - 6) \geq 0.$$

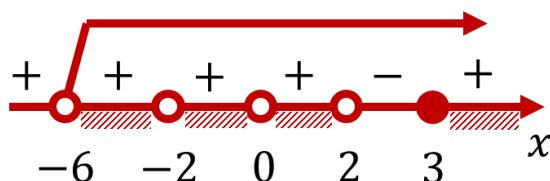
Разложим на множители выражение, стоящее в обеих скобках:

$$(0.5x - 1)(0.5x + 1)(x + 2)(x - 3) \geq 0.$$

Если умножить обе части на 2 и внести этот множитель во вторую скобку, то получится следующее уравнение:

$$(0.5x - 1)(x + 2)^2(x - 3) \geq 0.$$

Изобразим на числовой прямой промежутки, на которые разбивают числовую ось корни полученного многочлена слева, определим знаки многочлена в каждом промежутке и выделим решение неравенства с учётом области допустимых значений:



Итак, окончательный ответ:

$$x \in (-6; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup [3; +\infty).$$

Пример 3. Решите неравенство:

$$|x^2 - 8x + 15| \geq |x^2 + 2x - 15|.$$

Воспользуемся методом рационализации для решения данного неравенства.

Заменим его равносильным и более простым неравенством:

$$(x^2 - 8x + 15 - x^2 - 2x + 15) \times$$

$$\times (x^2 - 8x + 15 + x^2 + 2x - 15) \geq 0.$$

Приведём подобные слагаемые в обеих скобках:

$$(-10x + 30)(2x^2 - 6x) \geq 0.$$

Из первой скобки вынесем множитель -10 , а из второй — множитель $2x$ и разделим обе части неравенства на -20 , поменяв при этом его знак:

$$x(x - 3)^2 \leq 0.$$

Видно, что выражение слева может быть меньше нуля только при $x < 0$ (так как второй множитель всегда неотрицателен, ибо является полным квадратом), а равно нулю при $x = 0$ или $x = 3$. Итак, окончательный ответ к данному неравенству:

$$x \in (-\infty; 0] \cup \{3\}.$$

Вот такое простое и изящное решение. При этом можете себе представить, что было бы, если бы мы решили воспользоваться стандартным методом решения неравенств с модулями и стали бы раскрывать модули при различных значениях x .

Рассмотрим ещё один пример решения неравенства с модулем методом рационализации. На этот раз из реального прототипа заданий для ЕГЭ по математике.

Пример 4. Найдите все значения a , при каждом из которых

$$\text{неравенство } \left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3 \text{ выполняется при всех } x.$$

Воспользуемся методом рационализации для решения данного неравенства с модулем. Заменяем исходное неравенство равносильным ему неравенством без модулей:

$$\left(\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} - 3\right) \left(\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} + 3\right) < 0.$$

После преобразования выражений, находящихся в скобках, получаем следующий результат:

$$\frac{-2x^2 + (a - 3)x - 2}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{4x^2 + (a + 3)x + 4}{x^2 + x + 1} < 0.$$

Поскольку $x^2 + x + 1 > 0$ при всех значениях x , то можно дважды умножить обе части полученного неравенства на $x^2 + x + 1$, не меняя при этом знак неравенства. В результате приходим к следующему неравенству:

$$(-2x^2 + (a - 3)x - 2)(4x^2 + (a + 3)x + 4) < 0.$$

Или после умножения обеих частей на -1:

$$(2x^2 - (a - 3)x + 2)(4x^2 + (a + 3)x + 4) > 0.$$

Последнее неравенство может быть выполнено для любых x только в том случае, если обе соответствующие параболы, ветви которых направлены вверх, целиком лежат выше оси ОХ. Это условие выполняется в том случае, если дискриминанты обоих квадратных трёхчленов отрицательны. То есть имеет место система неравенств:

$$\begin{cases} (a - 3)^2 - 16 < 0 \\ (a + 3)^2 - 64 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 3)^2 < 16 \\ (a + 3)^2 < 64. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < a - 3 < 4 \\ -8 < a + 3 < 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 7 \\ -11 < a < 5. \end{cases}$$

Решением этой системы является промежуток: $a \in (-1; 5)$.

Примечание. Предвижу ваши возражения. Да, неравенство типа $|f(x)| < a$, $a > 0$ можно сразу заменить двойным неравенством $-a < f(x) < a$. Здесь просто для иллюстрации предложен альтернативный способ решения неравенства методом рационализации.

На самом деле предложенный метод, конечно, работает не только с неравенствами, но и с уравнениями. Рассмотрим для примера решение следующего примера из реальных прототипов заданий ЕГЭ по математике.

Пример 5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|x^2 - 2ax + 7| = |6a - x^2 - 2x - 1|$ имеет более двух различных корней.

Заменим данное уравнение следующим равносильным ему уравнением:

$$(x^2 - 2ax + 7 - 6a + x^2 + 2x + 1) \times \\ \times (x^2 - 2ax + 7 + 6a - x^2 - 2x - 1) = 0.$$

Или после упрощения выражений, стоящих в обеих скобках:

$$(2x^2 - 2x(a - 1) + 8 - 6a) \times \\ \times (-2x(a + 1) + 6(a + 1)) = 0.$$

После вынесения общих множителей из скобок получаем:

$$-4(a + 1)(x^2 - x(a - 1) + 4 - 3a)(x - 3) = 0.$$

Заметим, что при $a = -1$ корень x может быть любым числом. Этот случай нам подходит. Для $a \neq -1$ разделим обе части этого уравнения на $-4(a + 1)$:

$$(x - 3)(x^2 - x(a - 1) + 4 - 3a) = 0.$$

Данное уравнение может иметь от 1 до 3 корней. Нам нужны случаи, когда будет 3 различных корня. Один из этих корней обязательно будет равен 3. Следовательно, задача сводится к поиску всех значений параметра a , при каждом из которых квадратный трёхчлен, стоящий в скобках имеет два корня, каждый из которых отличен 3. Это условие достигается тогда и только тогда, когда дискриминант этого квадратного трёхчлена положителен и значение многочлена в скобках при $x = 3$ не равно нулю. То есть имеет место система неравенств:

$$\begin{cases} (1 - a)^2 - 4(4 - 3a) > 0 \\ 3^2 - 3(a - 1) + 4 - 3a \neq 0. \end{cases}$$

Эту систему можно упростить:

$$\begin{cases} a^2 + 10a - 15 > 0 \\ 8 - 3a \neq 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является промежуток:

$$a \in (-\infty; -5 - 2\sqrt{10}) \cup \{-1\} \cup (2\sqrt{10} - 5; \frac{8}{3}) \cup (\frac{8}{3}; +\infty).$$

2.3. Дидактический материал

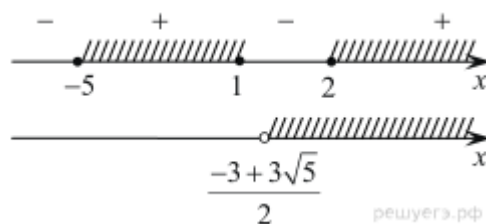
1. $\log_{x^2}(x - 1)^2 \leq 1.$
2. $|x^2 - 4x + 3| \geq |6x - 5 - x^2|.$
3. $\log_2(x^2 - 4) - 3\log_2 \frac{x+2}{x-2} > 2.$
4. $\frac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \geq 2\log_2 x.$
5. $\log_3(x^2 - x - 3) + \log_3(2x^2 + x - 3) \geq \log_3(x^2 - 2)^2 + 2 + \log_{\frac{1}{3}} 4.$

3. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ

1. $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2 + 3x - 9) \leq \log_3(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10).$

Решение.

Решим неравенство:



$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2 + 3x - 9) \leq \log_3(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2 + 3x - 9) \leq \log_3(x^3 + 3x^2 + 1 - 10x), \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 9 \leq x^3 + 3x^2 + 1 - 10x, \\ \begin{cases} x < \frac{-3 - 3\sqrt{5}}{2}, \\ x > \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2}, \\ x > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 13x + 10 \geq 0, \\ x > \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + 3x - 10) \geq 0, \\ x > \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

ОТВЕТ: $[2; +\infty)$.

2. $9\log_7(x^2 + x - 2) \leq 10 + \log_7 \frac{(x-1)^9}{x+2}.$

Решение.

Найдём значения x , при которых определены обе части неравенства:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0, \\ \frac{(x-1)^9}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1) > 0, \\ \frac{(x-1)^9}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x > 1. \end{cases}$$

Для таких x получаем:

$$9\log_7(x+2)(x-1) + \log_7 \frac{x+2}{(x-1)^9} = \log_7 \frac{(x+2)^9(x-1)^9(x+2)}{(x-1)^9} = \log_7(x+2)^{10}.$$

Тогда исходное неравенство примет вид: $\log_7(x+2)^{10} \leq 10$. Учитывая, что неравенство определено на множестве $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$, имеем:

$$5\log_7(x+2)^2 \leq 10 \Leftrightarrow (x+2)^2 \leq 7^2 \Leftrightarrow (x-5)(x+9) \leq 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -9 \leq x < -2, \\ 1 < x \leq 5. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $[-9; -2) \cup (1; 5]$

3. $\log_2(x^2 - 4) - 3\log_2 \frac{x+2}{x-2} > 2.$

Решение.

Область определения состоит из двух промежутков: либо $x > 2$, либо $x < -2$. На каждом из них логарифм частного можно представить в виде разности логарифмов.

Если $x > 2$, то:

$$\begin{aligned} \log_2(x+2) + \log_2(x-2) - 3\log_2(x+2) + 3\log_2(x-2) > 2 &\Leftrightarrow \log_2(x+2) - 2\log_2(x-2) < -1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2 2(x+2) < \log_2(x-2)^2 &\Leftrightarrow 2x+4 < (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x(x-6) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x > 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая, что $x > 2$, получаем: $x > 6$.

Если $x < -2$, то:

$$\begin{aligned} \log_2(-x-2) + \log_2(-x+2) - 3\log_2(-x-2) + 3\log_2(-x+2) > 2 &\Leftrightarrow \log_2(-x-2) - 2\log_2(2-x) < -1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2 2(-x-2) < \log_2(2-x)^2 &\Leftrightarrow -2x-4 < (2-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 8 > 0. \end{aligned}$$

Полученное неравенство выполняется при всех x .

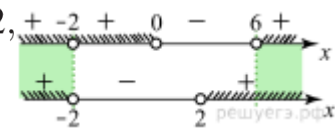
Таким образом, решение исходного неравенства: $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.

ОТВЕТ: $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.

Приведем другое решение.

Внесём 3 под знак логарифма и используем формулу разности логарифмов:

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 - 4) - 3\log_2 \frac{x+2}{x-2} > 2 &\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 4) - \log_2 \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^3 > 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 \frac{(x-2)^4(x+2)}{(x+2)^3} > 2, \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)^4}{(x+2)^2} > 4, \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)^4 - 4(x+2)^2}{(x+2)^2} > 0, \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x^2 - 6x)(x^2 - 2x + 8)}{(x + 2)^2} > 0, \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x > 6 \end{cases}$$


ОТВЕТ: $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.

4. $\frac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \geq 2\log_2 x.$

Решение.

Пусть $y = \log_2 x$, получаем:

$$\frac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \geq 2\log_2 x \Leftrightarrow \frac{y - 5}{1 - 2y} \geq 2y \Leftrightarrow \frac{4y^2 - y - 5}{2y - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(y + 1)(4y - 5)}{2y - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -1, \\ \frac{1}{2} < y \leq \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} \log_2 x \leq -1, \\ 0,5 < \log_2 x \leq 1,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2} < x \leq \sqrt[4]{32}. \end{cases}$$

Таким образом, решение исходного неравенства $(0; 0,5] \cup (\sqrt{2}; \sqrt[4]{32}]$.

ОТВЕТ: $(0; 0,5] \cup (\sqrt{2}; \sqrt[4]{32}]$.

5. $\log_3(x^2 - x - 3) + \log_3(2x^2 + x - 3) \geq \log_3(x^2 - 2)^2 + 2 + \log_{\frac{1}{3}} 4.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases} \log_3(4(x^2 - x - 3)(2x^2 + x - 3)) \geq \log_3(3x^2 - 6)^2, \\ x^2 - x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2 - x - 3)(2x^2 + x - 3) \geq (3x^2 - 6)^2, \\ x^2 - x - 3 > 0, \\ 3x^2 - 6 \neq 0. \end{cases}$$

Заметим,

что $3x^2 - 6 = (x^2 - x - 3) + (2x^2 + x - 3)$. Пусть $x^2 - x - 3 = a$, $2x^2 + x - 3 = b$.

Тогда неравенство системы принимает вид:

$$4ab \geq (a + b)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \leq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \leq 0.$$

Данное неравенство выполняется только при $a = b$. Значит,

$$x^2 - x - 3 = 2x^2 + x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -2. \end{cases}$$

С учётом ограничений из первой системы получаем, что $x = -2$

Ответ: -2 .

$$6. \frac{\lg(5y^2 - 2y + 1)}{\lg(4y^2 - 5y + 1)^3} \leq \frac{\log_{5^3} 7}{\log_5 7}.$$

Решение.

Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{\lg(5y^2 - 2y + 1)}{\lg(4y^2 - 5y + 1)^3} \leq \frac{\log_{5^3} 7}{\log_5 7} &\Leftrightarrow \frac{\lg(5y^2 - 2y + 1)}{3 \lg(4y^2 - 5y + 1)} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_{4y^2 - 5y + 1}(5y^2 - 2y + 1) \leq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_{4y^2 - 5y + 1} \left(\frac{5y^2 - 2y + 1}{4y^2 - 5y + 1} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Перейдём к системе:

$$\begin{cases} 4y^2 - 5y + 1 > 0, \\ 4y^2 - 5y + 1 \neq 1, \\ 5y^2 - 2y + 1 > 0, \\ (4y^2 - 5y + 1 - 1) \left(\frac{5y^2 - 2y + 1}{4y^2 - 5y + 1} - 1 \right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4y - 1)(y - 1) > 0, \\ y(4y - 5) \neq 0, \\ (4y - 5)(y + 3) \leq 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $y < \frac{1}{4}$ или $y > 1$. Из второго равенства получаем, что $y \neq 0$ и $y \neq \frac{5}{4}$. Решение третьего неравенства: $-3 \leq y \leq \frac{5}{4}$.

Таким образом, решением неравенства является

$$\text{множество } [-3; 0) \cup \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(1; \frac{5}{4}\right).$$

$$\text{Ответ: } [-3; 0) \cup \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(1; \frac{5}{4}\right).$$

$$7. \frac{\lg(3x + 2\sqrt{x} - 1)}{\lg(5x + 3\sqrt{x} - 2)^5} \geq \frac{\log_{32} 11}{\log_2 11}.$$

Решение.

Сделаем замену $\sqrt{x} = y$, $y \geq 0$ и упростим левую и правую

части: $\frac{\lg(3y^2 + 2y - 1)}{\lg(5y^2 + 3y - 2)} \geq 1$.

Учитывая, что $y \geq 0$, домножая на знаменатель, получаем два случая :

Первый случай (знаменатель положителен):

$$1 < 5y^2 + 3y - 2 \leq 3y^2 + 2y - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 + 3y - 3 > 0, \\ 2y^2 + y - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > \frac{\sqrt{69} - 3}{10}, \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ решений нет.}$$

Второй случай (знаменатель отрицателен):

$$\begin{cases} 5y^2 + 3y - 2 < 1, \\ 5y^2 + 3y - 2 \geq 3y^2 + 2y - 1, \\ 3y^2 + 2y - 1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 + 3y - 3 < 0, \\ 3y^2 + 2y - 1 > 0, \\ 2y^2 + y - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y < \frac{\sqrt{69} - 3}{10}, \\ y > \frac{1}{3}, \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y < \frac{\sqrt{69} - 3}{10}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt{x} < \frac{\sqrt{69} - 3}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x < \frac{39 - 3\sqrt{69}}{50}.$$

Ответ: $\left[0,25; \frac{39 - 3\sqrt{69}}{50} \right)$.

8. $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} \leq 256$.

Решение.

Область определения неравенства задается условием $x > 0$. На

множестве $(0; +\infty)$ имеем: $x = 2^{\log_2 x}$, и тогда для второго слагаемого

получаем $x^{\log_2 x} = (2^{\log_2 x})^{\log_2 x} = 2^{\log_2 x \cdot \log_2 x} = 2^{\log_2^2 x}$.

Далее имеем:

$$2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} \leq 256 \Leftrightarrow 2^{\log_2^2 x} + 2^{\log_2^2 x} \leq 256 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{\log_2^2 x} \leq 256 \Leftrightarrow 2^{\log_2^2 x} \leq 128 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^{\log_2^2 x} \leq 2^7 \Leftrightarrow \log_2^2 x \leq 7 \Leftrightarrow -\sqrt{7} \leq \log_2 x \leq \sqrt{7} \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{7}} \leq x \leq 2^{\sqrt{7}}.$$

ОТВЕТ: $[2^{-\sqrt{7}}; 2^{\sqrt{7}}]$.

Примечание.

Можно было преобразовать первое слагаемое к виду $x^{\log_2 x}$, свести задачу к неравенству $x^{\log_2 x} \leq 128$, которое логарифмированием обеих частей по основанию 2 привести к неравенству $\log_2^2 x \leq 7$.

9. $(x^2 + 1)^{\lg(7x^2 - 3x + 1)} + (7x^2 - 3x + 1)^{\lg(x^2 + 1)} \leq 2.$

Решение.

Так как $x^2 + 1 > 0$ и $7x^2 - 3x + 1 > 0$ для любого x , воспользовавшись тождеством $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ заключаем, что слагаемые в левой части неравенства равны. Тогда получаем:

$$(x^2 + 1)^{\lg(7x^2 - 3x + 1)} \leq 1.$$

Заметим, что при $x = 0$ неравенство верно. При $x \neq 0$ основание степени больше 1, поэтому показатель степени должен быть неположительным:

$$\begin{cases} \lg(7x^2 - 3x + 1) \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow_{10 > 1} \begin{cases} 7x^2 - 3x + 1 \leq 1, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{3}{7}.$$

Объединяя рассмотренные случаи, получаем: $0 \leq x \leq \frac{3}{7}.$

ОТВЕТ: $\left[0; \frac{3}{7}\right].$

10. $\log_2 \frac{8}{x} - \frac{10}{\log_2 16x} \geq 0.$

Решение.

Относительно $t = \log_2 x$ неравенство имеет вид:

$$3 - t - \frac{10}{t + 4} \geq 0, \quad \frac{(3 - t)(t + 4) - 10}{t + 4} \geq 0, \quad \frac{-t^2 - t + 2}{t + 4} \geq 0, \quad \frac{(t + 2)(1 - t)}{t + 4} \geq 0.$$

Значит, $t < -4$ или $-2 \leq t \leq 1$. Возвращаясь к x , получаем:

$$\log_2 x < -4 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{16}$$

или

$$-2 \leq \log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq 2.$$

ОТВЕТ: $\left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; 2\right]$.

11. $\left|\log_x \frac{x}{4}\right| \cdot \log_{4x}(2x^2) \leq \left|\log_x \frac{x}{4}\right|.$

Решение.

Областью определения неравенства являются положительные числа, отличные от 0,25 и 1. Выражение $\left|\log_x \frac{x}{4}\right|$ либо равно нулю при $x = 4$, при этом неравенство верно; либо положительно, и тогда на него можно разделить, не меняя знака неравенства. Имеем:

$$\log_{4x}(2x^2) \leq 1 \Leftrightarrow \log_{4x}(2x^2) \leq \log_{4x} 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0,25, \\ (4x-1)(2x^2-4x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0,25, \\ (4x-1)(x-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x \leq 2.$$

Учитывая, что $x \neq 1$, получаем ответ: $\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 2] \cup \{4\}.$

ОТВЕТ: $\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 2] \cup \{4\}.$

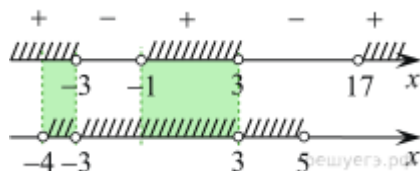
12. $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1.$

Решение.

Решим неравенство методом рационализации:

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} - \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{25-x^2}{16} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{25-x^2}{16} - 1\right) \left(\frac{24+2x-x^2}{14} - \frac{25-x^2}{16}\right) > 0, \\ 25-x^2 > 0, \\ 24+2x-x^2 > 0 \\ \frac{25-x^2}{16} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{9-x^2}{16}\right) \left(\frac{-x^2+16x+17}{112}\right) > 0, \\ -5 < x < 5, \\ -4 < x < 6, \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-9)(x^2-16x-17) > 0, \\ -4 < x < 5, \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < -3, \\ -1 < x < 3. \end{cases}$$

Ответ: $(-4; -3) \cup (-1; 3)$.

13.
$$\frac{\log_2(8x) \cdot \log_{0,125x} 2}{\log_{0,5x} 16} \leq \frac{1}{4}.$$

Решение.

Левая часть неравенства имеет смысл при $x > 0$, $0,5x \neq 1$ и $0,125x \neq 1$, то есть при $x > 0$, $x \neq 2$ и $x \neq 8$. При этих условиях получаем:

$$\frac{\log_2(8x) \cdot \frac{1}{\log_2(0,125x)}}{\frac{4}{\log_2(0,5x)}} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{(\log_2 8 + \log_2 x)(\log_2 0,5 + \log_2 x)}{\log_2 0,125 + \log_2 x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(\log_2 x + 3)(\log_2 x - 1)}{\log_2 x - 3} \leq 1.$$

Сделаем замену $t = \log_2 x$, тогда

$$\frac{(t+3)(t-1)}{t-3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{t(t+1)}{t-3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1, \\ 0 \leq t < 3. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

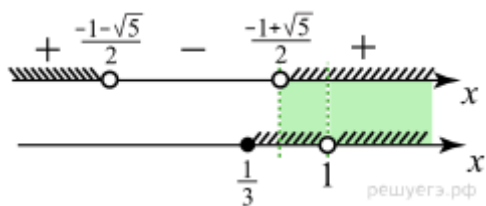
$$\begin{cases} 0 < x \leq 0,5, \\ 1 \leq x < 8. \end{cases}$$

Из полученного набора нужно ещё исключить точку 2. Таким образом, множество решений исходного неравенства: $(0; 0,5] \cup [1; 2) \cup (2; 8)$.

Ответ: $(0; 0,5] \cup [1; 2) \cup (2; 8)$.

14.
$$\log_{x^2+x}(x^2 - 2x + 1) \leq 1.$$

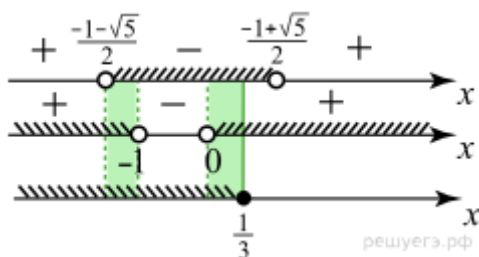
Решение.



1) Если $x^2 + x > 1$, то

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 > 0, \\ 0 < x^2 - 2x + 1 \leq x^2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 > 0, \\ x \neq 1, \\ 3x \geq 1, \end{cases}$$

откуда $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < x < 1$ или $x > 1$.



2) Если $0 < x^2 + x < 1$, то

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 < 0, \\ x^2 + x > 0, \\ x^2 - 2x + 1 \geq x^2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 < 0, \\ x(x + 1) > 0, \\ 3x \leq 1, \end{cases}$$

откуда $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x < -1$ или $0 < x \leq \frac{1}{3}$.

Объединяя найденные промежутки, получаем решение неравенства:

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x < -1 \quad \text{или} \quad 0 < x \leq \frac{1}{3} \quad \text{или} \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < x < 1 \quad \text{или} \quad x > 1.$$

Ответ: $\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; -1\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty).$

15. $(x - 1) \log_{x+3}(x + 2) \cdot \log_3(x + 3)^2 \leq 0.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов.

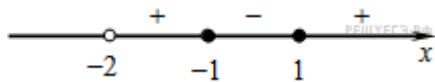
Найдём ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1, \\ x+2 > 0, \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2.$$

Найдем корни:

Из первого множителя $x = 1$, из второго $-x = -1$, третий не дает корней.

Определим знаки левой части на ОДЗ (см. рис.):



Тем самым, множество решений неравенства: $[-1; 1]$.

Приведём другое решение.

Найдем сначала область определения неравенства:

$$\begin{cases} x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1, \\ x+2 > 0, \\ (x+3)^2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x \neq -2, \\ x > -2, \\ x \neq -3. \end{cases} \Leftrightarrow x > -2.$$

Далее заметим, что на области определения знак множителя $\log_{x+3}(x+2)$ совпадает со знаком выражения $(x+2)(x+1)$. Знак множителя $\log_3(x+3)^2$ совпадает со знаком выражения $((x+3)^2 - 1)$, которое на области определения неравенства всегда положительно.

Таким образом, на области определения исходное неравенство равносильно неравенству

$$(x-1)(x+2)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Учитывая область определения, получим

$$-1 \leq x \leq 1.$$

Ответ: $[-1; 1]$.

16. $\log_2 16x \geq \log_{0,5x} 2 \cdot \log_4 16x^4.$

Решение.

Сделаем замену $z = \log_2 x$.

$$z + 4 \geq \frac{2z + 2}{z - 1} \Leftrightarrow \frac{z^2 + z - 6}{z - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq z < 1, \\ z \geq 2. \end{cases}$$

Тогда $-3 \leq \log_2 x < 1$ или $\log_2 x \geq 2$, откуда находим решение неравенства: $\left[\frac{1}{8}; 2\right) \cup [4; +\infty)$.

ОТВЕТ: $\left[\frac{1}{8}; 2\right) \cup [4; +\infty)$.

17. $\log_{\log_x 2x}(6x - 2) \geq 0$.

Решение.

Область допустимых значений неравенства задается соотношениями:

$$\begin{cases} \log_x 2x > 0, \\ \log_x 2x \neq 1, \\ 6x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}, \\ x > 1. \end{cases}$$

На области допустимых значений справедливы равносильности:

$$\log_a b \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b - 1}{a - 1} \geq 0, \log_a b - \log_a c \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b - c}{a - 1} \geq 0, a^b - a^c \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)(b - c) \geq 0.$$

Поэтому на ОДЗ имеем:

$$\begin{aligned} \log_{\log_x 2x}(6x - 2) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{6x - 3}{\log_x 2x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3(2x - 1)}{\log_x 2x - \log_x x} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2x - 1}{\frac{x}{x - 1}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2x - 1)(x - 1)}{x} \geq 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

С учетом ОДЗ получаем ответ.

ОТВЕТ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.