МБОУ «Кирюшкинская средняя общеобразовательная школа»

Бугурусланского района Оренбургской области

Решение показательных уравнений

Задание №13 ЕГЭ

Подготовила: Фазлутдинова Разина Галимулловна,

учитель математики

высшей квалификационной категории

2020

Решение показательных уравнений. (Прототипы задания №13 ЕГЭ)

13 заданием профильного ЕГЭ по математике является уравнение. Одним, из часто встречаемых уравнений, которое может оказаться в 13 задание, является показательное уравнение.

I. Из открытого банка ФИПИ

а) $\frac{9^{\sin 2x}-3^{2\sqrt{2}\sin x}}{\sqrt{11\sin x}}=0$

Все решения уравнения содержатся на множестве тех x, для каждого из которых $\sin x>0, \quad x\in$ I и II

$$9^{\sin 2x}-3^{2\sqrt{2}\sin x}=0$$
$$9^{\sin 2x}=3^{2\sqrt{2}\sin x}$$
$$3^{2\sin 2x}=3^{2\sqrt{2}\sin x}$$
$$\sin 2x=\sqrt{2}\sin x$$
$$2\sin x*\cos x-\sqrt{2}\sin x=0$$
$$\sin x*(2\cos x-\sqrt{2})=0$$

$$\sin x=0$$

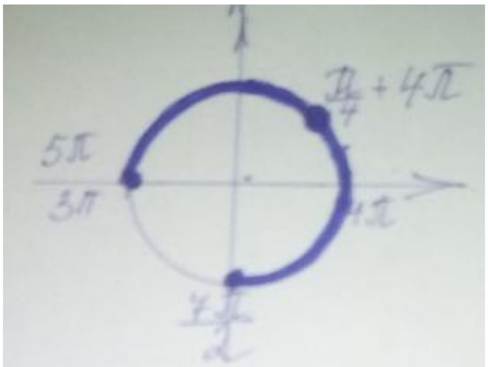
Нет решения, т.к. $\sin x>0$

$$2\cos x-\sqrt{2}=0$$

$x_1=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in N$ или $x_2=-\frac{\pi}{4}+2\pi m, m \in N$

Т.к. $\sin x>0$, , то $x_1=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in N$

б) С помощью числовой окружности отберем корни на отрезке $[\frac{7\pi}{2};5\pi]$



Получим число:

$$4\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{17\pi}{4}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in N$

б) $\frac{17\pi}{4}$

II. Из сайта ALEXLARIN

Пример 1 (тренировочный вариант № 288)

а)$\left(\sqrt{2}^{\sin^2x+\sqrt{\cos x}}\right)^2+2^{\cos^2x+\sqrt{\cos x}} = 3 * 2^{\sqrt{\cos x}}$

$2^{\sin^2x+\sqrt{\cos x}}+2^{\cos^2x+\sqrt{\cos x}} - 3 * 2^{\sqrt{\cos x}} = 0$

$2^{\sqrt{\cos x}}\left(2^{\sin^2x} + 2^{\cos^2x} - 3\right) = 0$

$2^{\sqrt{\cos x}} \neq 0$

Все решения уравнения содержатся на множестве тех x, для каждого из которых $\cos x \geq 0, \quad x \in$ I и II

$2^{\sin^2x} + 2^{\cos^2x} - 3=0$

$2^{\sin^2x} + 2^{1-\sin^2x} - 3=0$

$2^{\sin^2x} + 2 * 2^{-\sin^2x} - 3=0,\ 2^{\sin^2x} = t > 0$

$t + \frac{2}{t} - 3 = 0+$

$t_1 = 1$ или $t_2 = 2$

$2^{\sin^2x} = 1$

$\sin^2x = 0$

$\sin x = 0$

$x = \pi n, n \in N$

Т.к $\cos x \geq 0,$ то $x = 2\pi n, n \in N$

$2^{\sin^2x} = 2$

$\sin^2x = 1$

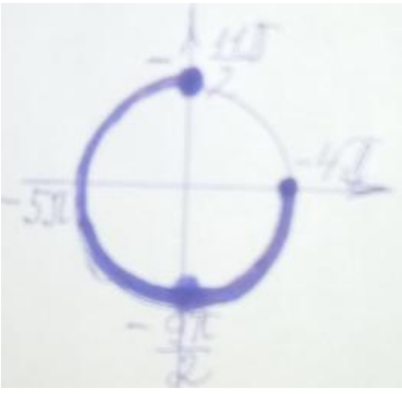
$\sin x = 1$ или $\sin x = -1$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in N$

или $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in N$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in N$

б) С помощью числовой окружности отберем корни на отрезке $[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi]$



Получим число: $-4\pi;\ -\frac{11\pi}{2};\ -\frac{9\pi}{2}$

Ответ: а) $x = 2\pi n, n \in N;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in N$

б) $-\frac{11\pi}{2}; -\frac{9\pi}{2}; -4\pi$

Пример 2

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}^{2\sin\pi x}+\sqrt{2-\sqrt{3}}^{2\sin\pi x}=4$$

Т.к. $\sqrt{2+\sqrt{3}}*\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\sqrt{4-3}=1$, то $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

$(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}})^{2\sin\pi x}+\sqrt{2-\sqrt{3}}^{2\sin\pi x}=4,$ пусть $\sqrt{2-\sqrt{3}}^{2\sin\pi x}=t>0$

$$\frac{1}{t}+t=4$$

$$\frac{1+t^2-4t}{t}=0$$

$$t^2-4t+1=0$$

D=12

$t_1=2-\sqrt{3}$ или $t_2=2+\sqrt{3}$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}^{2\sin\pi x}=2-\sqrt{3}$$

$$\sin\pi x=1$$

$$\pi x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in N$$

$$x=\frac{1}{2}+2n, n\in N$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}^{2\sin\pi x}=2+\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{2\sin\pi x}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$2\sin\pi x=-2$$

$$\sin\pi x=-1$$

$$\pi x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in N$$

$$x=-\frac{1}{2}+2m, m\in N$$

Ответ: $\mp\frac{1}{2}+2k, k\in N$

III. Из сборника А.А. Рывкина «Задачи по математике для поступающих в вузы»

Пример 1

$$4^{\text{tg}^2x}+2^{\frac{1}{\cos^2}}-80=0$$

Dсе решения уравнения содержатся на множестве тех x, для каждого из которых $\cos x\neq 0$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in N$

$$4^{\text{tg}^2x}+2^{1+\text{tg}^2x}-80=0$$

$$2^{2\text{tg}^2x}+2*2^{\text{tg}^2x}-80=0$$

$$t^2+2t-80=0$$

Пусть $2^{\text{tg}^2x}=t>0$

$t_1 = -10$ или $t_2 = 8$

Решения нет

$$2^{tg^2 x} = 8$$

$$tg^2 x = 3$$

$tg\ x = \sqrt{3}$ или $tg\ x = -\sqrt{3}$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in N \quad \text{или} \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi m, m \in N$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in N$

Пример 2

$$\sin(2^{x-1} + 2^{x-2}) * \cos(2^{x-1} + 2^{x-2}) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}\sin 2 * (2^{x-1} + 2^{x-2}) = \frac{1}{4}$$

$$\sin(2^x + 2^{x-1}) = \frac{1}{2}$$

$2^x + 2^{x-1} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in N$ или $2^x + 2^{x-1} = 5\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in N$

$$2^x * \frac{3}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in N$$

$2^x = \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi n}{3}, n \in N$ $\qquad$ $2^x = \frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi m}{3}, m \in N$

Т.к. $2^x > 0$, то

Неравенство $\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi n}{3} > 0$ выполняется при $n \geq 0$

Неравенство $\frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi m}{3} > 0$ выполняется при $m \geq 0$

Ответ: $x = \log_2(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi n}{3})$, при $n \geq 0$

$x = \log_2(\frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi m}{3})$, при $m \geq 0$

IV. Из сборника «Задачи М.И. Сканави» (том 4)

$$2^{tg(x-\frac{\pi}{4})} - 2 * 0{,}25^{-\frac{\sin^2 x}{\cos 2x}} - 1 = 0$$

$$2^{tg(x-\frac{\pi}{4})} - 2 * 2^{\frac{2\sin^2(x-\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{2}-2x)}} - 1 = 0$$

$$2^{tg(x-\frac{\pi}{4})} - 2 * 2^{\frac{2\sin^2(x-\frac{\pi}{4})}{-\sin 2(x-\frac{\pi}{4})}} - 1 = 0$$

$$2^{tg(x-\frac{\pi}{4})}-2*2^{\frac{2\sin^2(x-\frac{\pi}{4})}{-2\sin(x-\frac{\pi}{4})*\cos(x-\frac{\pi}{4})}}-1=0$$

$$2^{tg(x-\frac{\pi}{4})}-2*2^{\frac{2\sin(x-\frac{\pi}{4})}{-2\cos(x-\frac{\pi}{4})}}-1=0$$

$2^{tg(x-\frac{\pi}{4})}-2*2^{-tg(x-\frac{\pi}{4})}-1=0$, пусть $2^{tg(x-\frac{\pi}{4})}$ =t>0

$t—\frac{2}{t}-1=0$

$$\frac{t^2-t-2}{t}=0$$

$$t^2-t-2=0$$

$t_1=2$ или t_2=-1

$$2^{tg(x-\frac{\pi}{4})}=2$$

$$tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in N$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in N$$

Нет решения

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in N$

Интернет – ресурсы:

1. http://reshuege.ru "Решу ЕГЭ" - образовательный портал
2. http://alexlarin.net Ларин Александр Александрович. Математика. Репетитор.
3. https://meshok.net «Задачи по математике для поступающих в вузы»
4. http://spisok-literaturi.ru Математика. Задачи М.И. Сканави с решениями