МБОУ «Елатомская средняя общеобразовательная школа»

Бугурусланского района Оренбургской области

Решение показательных неравенств

Задание №15 ЕГЭ

Подготовила: Камскова Татьяна Владимировна,

учитель математики и информатики

высшей квалификационной категории

2020 г.

Решение показательных неравенств. (Прототипы задания №15 ЕГЭ)

15 заданием профильного ЕГЭ по математике является неравенство. Одним, из часто встречаемых неравенств, которое может оказаться в 15 задание, является показательное неравенство.

Показательным неравенством называется неравенство, в котором переменная содержится в показателе степени. Решение простейших показательных неравенств основано на свойстве возрастания (убывания) показательной функции: если основание показательной функции больше единицы, то показательная функция возрастает на R , то есть большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а меньшему значению функции соответствует меньшее значение аргумента. Если основание показательной функции больше нуля, но меньше единицы, то показательная функция убывает на R, то есть большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента, а меньшему значению функции соответствует большее значение аргумента.

Основные схемы решения показательных неравенств

- $$(\varphi(x))^{f(x)} > (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

- $$(\varphi(x))^{f(x)} \geq (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1, \end{cases} \\ \quad \varphi(x) = 1. \end{array}\right.$$

- Если число $a > 1$, то

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > g(x).$$

- Если число $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < g(x).$$

Рассмотрим неравенства, которые решаются заменой переменной.

С помощью подстановки $a^{f(x)} = t$, где t >0, неравенство приводится либо к квадратному неравенству относительно переменной t, либо к какому-нибудь другому неравенству относительно переменной t, решается относительно t , а затем ищется значение переменной x.

Решите неравенство: $16^x + 4^x - 2 > 0$.

Решение.

$16^x + 4^x - 2 > 0 \Leftrightarrow (4^2)^x + 4^x - 2 > 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 + 4^x - 2 > 0.$

Пусть $4^x = t$, $t > 0$, тогда

$$t^2 + t - 2 > 0 \Leftrightarrow (t+2)\cdot(t-1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t+2>0, \\ t-1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} t+2<0, \\ t-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t>-2, \\ t>1 \end{cases} \\ \begin{cases} t<-2, \\ t<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>1 \\ t<-2 \end{array}\right..$$

Вернемся к переменной x и получим два неравенства:

1) $4^x > 1 \Leftrightarrow 4^x > 4^0 \Leftrightarrow x > 0$.

2) $4^x < -2$, решений нет, так как $4^x > 0$.

Ответ:

$(0;+\infty)$.

Задание 15 № 508366 Сайт «Решу ЕГЭ»

Решите неравенство: $2^{2x-1} - 7\cdot 2^{x-1} + 5 \le 0.$

Решение.

$$2^{2x-1} - 7\cdot 2^{x-1} + 5 \le 0$$
$$\frac{1}{2}\cdot 2^{2x} - \frac{7}{2}\cdot 2^x + 5 \le 0$$
$$2^{2x} - 7\cdot 2^x + 10 \le 0$$

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2 - 7t + 10 \le 0$, откуда $2 \le t \le 5$. Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$2 \le 2^x \le 5 \Leftrightarrow 1 \le x \le \log_2 5.$$

Ответ: $[1;\ \log_2 5]$.

Задание 15 № 508503

Решите неравенство: $5^{x+2} + 2 \cdot 5^{-x} \le 51$.

Решение.

Сделаем замену $y = 5^x$:

$$25y + \frac{2}{y} \le 51 \Leftrightarrow \frac{25y^2 - 51y + 2}{y} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(y-2)(25y-1)}{y} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < 0, \\ \frac{1}{25} \le y \le 2. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $5^x > 0$, получаем: $\frac{1}{25} \le 5^x \le 2$, откуда получаем множество решений неравенства: $[-2;\ \log_5 2]$.

Ответ: $[-2;\ \log_5 2]$.

Аналог ЕГЭ 2017

Решите неравенство

$$\frac{8^{x+1} - 40}{2 \cdot 64^x - 32} \le 1.$$

ОДЗ:

$2 \cdot 64^x - 32 \ne 0 \quad \Leftrightarrow$

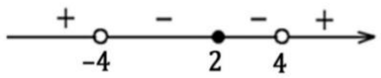
$4^{3x} \ne 4^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \ne \frac{2}{3}$.

Решение.

Сделаем замену $t = 8^x$, получим

$$\frac{8t - 40}{2t^2 - 32} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8t - 40 - 2t^2 + 32}{2t^2 - 32} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(t-2)^2}{2(t-4)(t+4)} \ge 0.$$

Решая методом интервалов,



видим $t \in (-\infty; -4) \cup \{2\} \cup (4; +\infty)$.

Таким образом, либо $8^x < -4$ - нет решений. Либо $8^x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Либо $8^x > 4 \Leftrightarrow 2^{3x} > 2^2 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $x \in \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Решите неравенство $3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \ge 3$

Данная задача была предложена выпускникам на резервном досрочном ЕГЭ по профильной математике 2018 года.

В данном варианте задача является существенно более простой, чем в аналогичных вариантах с основного досрочного периода ЕГЭ и реального ЕГЭ прошлых лет. Однако задача может показаться запутанной из-за своего нестандартного вида.

1 способ.

Разделим обе части неравенства на 3^{x^2}, получим $5^{x-1} \ge 3^{1-x^2}$

$$3^{\log_3 5^{x-1}} \ge 3^{1-x^2}$$

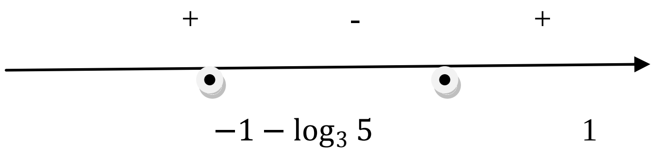
$$\log_3 5^{x-1} \ge 1 - x^2$$

$$(x-1)(\log_3 5) \ge (1-x)(1+x)$$

$$(x-1)(\log_3 5) + (x-1)(1+x) \ge 0$$

$$(x-1)(\log_3 5 + 1 + x) \ge 0$$

$$x = 1, x = -1 - \log_3 5$$



Ответ: $(-\infty;\ -1-\log_3 5] \cup [1;\ +\infty)$

2 способ.

$$5 = 3^{\log_3 5}$$

$$3^{x^2+(x-1)\log_3 5} \geq 3$$

$$x^2 + (x-1)\log_3 5 \geq 1$$

$$(x-1)(\log_3 5 + 1 + x) \geq 0$$

Ответ: $(-\infty;\ -1-\log_3 5] \cup [1;\ +\infty)$

Рассмотрим ещё 2 неравенства с сайта решу ЕГЭ.

№ 508460

Решите неравенство: $9^{\lg x} + x^{2\lg 3} \leq \dfrac{2}{3}.$

Решение.

Заметим, что $x^{2\lg 3} = x^{\lg 9} = 9^{\lg x}$ решим неравенство, сводящееся к логарифмическому:

$$9^{\lg x} + x^{2\lg 3} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 9^{\lg x} + 9^{\lg x} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 9^{\lg x} \leq 3^{-1} \Leftrightarrow 3^{2\lg x} \leq 3^{-1} \Leftrightarrow 2\lg x \leq -1 \Leftrightarrow \lg x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right].$

№ 508471

Решите неравенство: $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \geq 2\sqrt[4]{5}.$

Решение.

Приведем второе слагаемое к основанию 5:

$$x^{\log_5 x} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x} = 5^{\log_5^2 x}.$$

Неравенство принимает вид:

$$2\cdot 5^{\log_5^2 x} \geq 2\sqrt[4]{5} \Leftrightarrow 5^{\log_5^2 x} \geq 5^{0,25} \Leftrightarrow |\log_5 x| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \\ x \geq \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Решение неравенства: $\left(0;\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right] \cup [\sqrt{5};\ +\infty).$

Интернет – ресурсы:

1. http://reshuege.ru "Решу ЕГЭ" - образовательный портал
2. http://alexlarin.net Ларин Александр Александрович. Математика. Репетитор.
3. https://infourok.ru/metodicheskaya-razrabotka-po-teme-reshenie-pokazatelnyh-neravenstv-4277559.html. Учительский сайт.