

Знать мало – надо применять.
Хотеть мало – надо делать.
И.-В. Гете

Графики функций в школьном курсе математики. Графический способ решения заданий с параметром



СОДЕРЖАНИЕ:

1. Задания с графиками функций в ОГЭ (№22)..	3
2. Графический способ решения неравенств (№15).....	10
3.Графический метод решения задач с параметрами (№18).....	14

Задания с графиками функций в ОГЭ. (№22).

**Хуснутдинов Самат Хайдарович,
учитель математики первой
квалификационной категории
Староякуповского филиала
МБОУ «Сарай-Гирская СОШ»**

Задание 22

Постройте график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

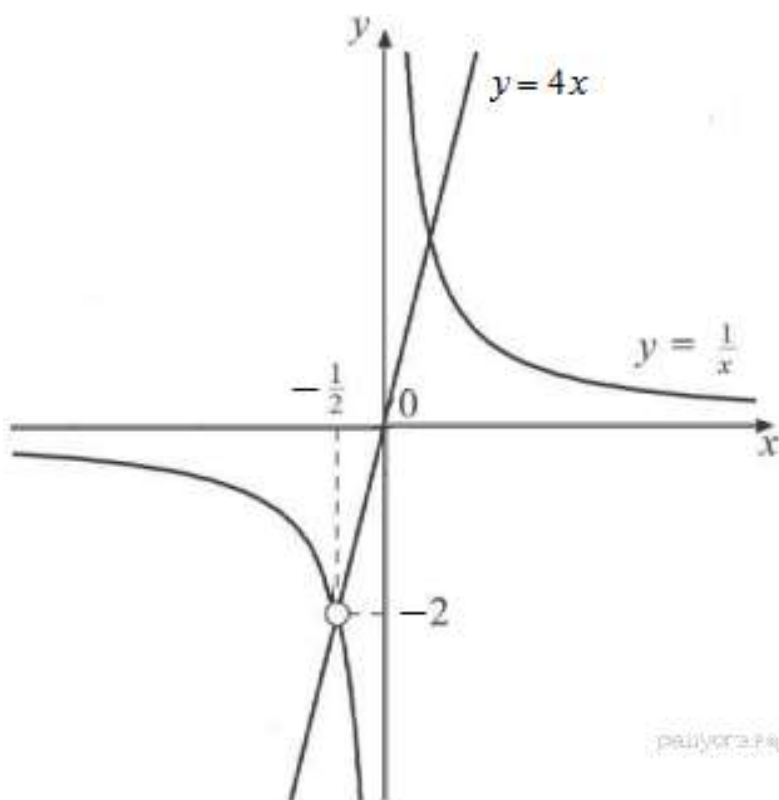
Решение.

При $x \neq -0,5$ имеем:

$$y = \frac{2x+1}{2x^2+x} = \frac{2x+1}{x(2x+1)} = \frac{1}{x}.$$

Поэтому график заданной функции представляет собой гиперболу, с выколотой точкой $(-0,5; -2)$. Прямая $y = kx$ будет иметь с графиком одну общую точку, если

пройдёт через выколотую точку. Тогда $k = \frac{-2}{-0,5} = 4$, и уравнение прямой примет вид: $y = 4x$.



Ответ: 4.

Задание 22

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \leq 1, \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$$

Постройте график функции и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

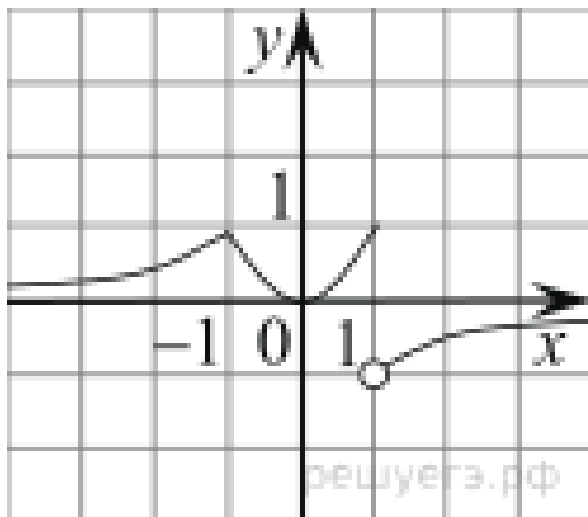


График функции изображён на рисунке.

Прямая $y = c$ будет иметь с графиком единственную общую точку при $-1 < c \leq 0$.

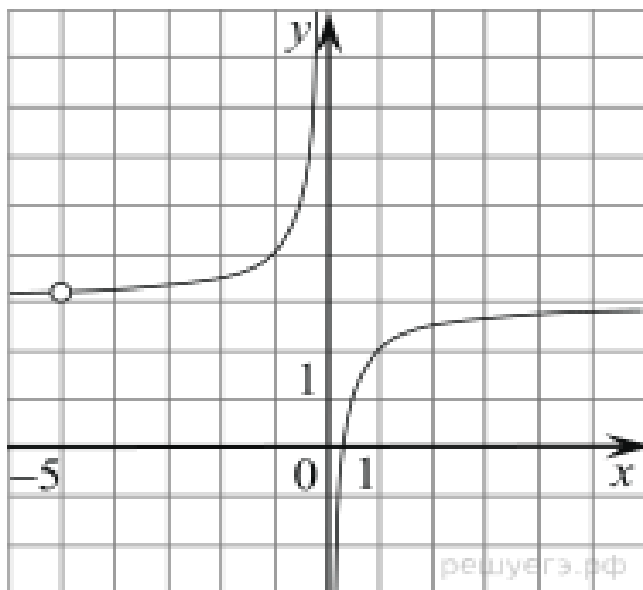
Ответ: $(-1; 0]$.

Задание 22

$$y = 3 - \frac{x+5}{x^2+5x}$$

Постройте график функции и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.



Преобразуем выражение:

$$3 - \frac{x+5}{x^2+5x} = 3 - \frac{x+5}{x(x+5)} = 3 - \frac{1}{x}, \text{ при условии, что } x \neq -5.$$

График данной функции получается из графика функции $y = \frac{1}{x}$ сдвигом на $(0; 3)$ и отражением через ось Ox . (см. рис.)

Прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки при $t = 3$ и $t = \frac{16}{5}$.

Ответ: $3; \frac{16}{5}$.

Задание 22

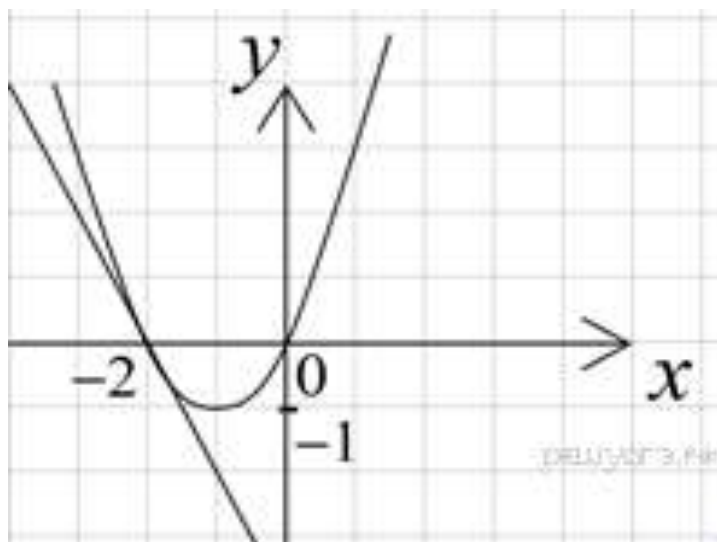
При каком значении p прямая $y = -2x + p$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p .

Решение.

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1$$

Следовательно, искомая параболa получается сдвигом графика функции $y = x^2$ на $(-1; -1)$ — см. рис.



Запишем условие общей точки: $-2x + p = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 + 4x - p = 0$.

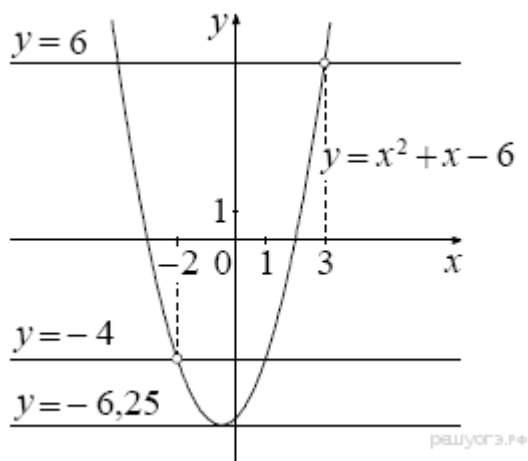
Прямая $y = -2x + p$ будет иметь с параболой единственную общую точку при условии, что дискриминант полученного квадратного уравнения равен нулю: $16 + 4p = 0$, откуда $p = -4$. Подставив значение параметра в уравнение, находим $x = -2$, $y = 0$.

Ответ: $p = -4$, координата точки: $(-2; 0)$.

Задание 22

Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.



Пусть $t = x^2$, тогда числитель принимает вид $t^2 - 13t + 36$. По теореме, обратной теореме Виета, сумма корней уравнения $t^2 - 13t + 36 = 0$ равна 13, а их произведение — 36. Тем самым, это числа 4 и 9. Тогда по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, получаем: $t^2 - 13t + 36 = (t - 4)(t - 9)$. Возвращаясь к исходной переменной, имеем:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3).$$

Сократим дробь: при $x \neq -2$ и $x \neq 3$ функция принимает вид:

$$y = (x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6,$$

её график — парабола с выколотыми точками $(-2; -4)$ и $(3; 6)$.

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 + x - 6 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}.$$

Следовательно, искомая парабола получается сдвигом графика функции $y = x^2$ на $(-0,5; -6,25)$ — см. рис.

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0,5; -6,25)$, ординаты выколотых точек суть $y(-2) = 4 - 2 - 6 = -4$ и $y(3) = 9 + 3 - 6 = 6$. Поэтому $c = -6,25$, $c = -4$ или $c = 6$.

Ответ: $c = -6,25$, $c = -4$ или $c = 6$.

Задание 22

$$y = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3}$$

Постройте график функции и найдите все значения a , при которых прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек.

Решение.

Найдём область определения функции:

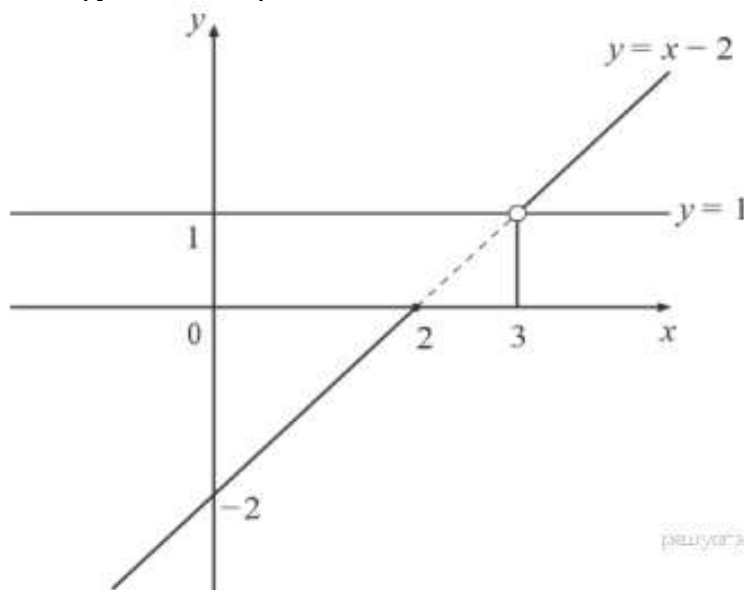
$$x^2 - 5x + 6 \geq 0; \quad x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$$

$$\text{и } x - 3 \neq 0.$$

Значит, функция определена при $x \in (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$.

$$\frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = x - 2$$

Поскольку , получаем, что на области определения функция принимает вид $y = x - 2$. График изображён на



рисунке.

Прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек при $a \in (0; 1]$.

Ответ: $a \in (0; 1]$.

Задание 22

Постройте график функции $y = |x - 2| - |x + 1| + x - 2$ и найдите значения m , при которых прямая $y = m$ имеет с ним ровно две общие точки.

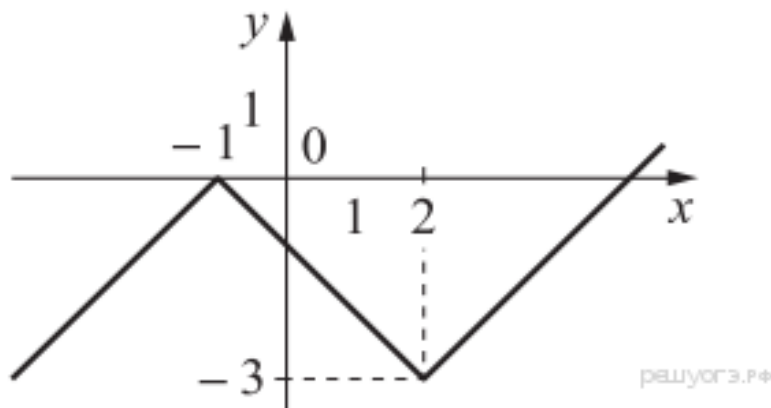
Решение.

Раскроем модули:

$$y = |x-2| - |x+1| + x - 2 = \begin{cases} x-2-x-1+x-2, & x \geq 2, \\ 2-x-x-1+x-2, & -1 \leq x < 2, \\ 2-x+x+1+x-2, & x < -1 \end{cases} = \begin{cases} x-5, & x \geq 2, \\ -x-1, & -1 \leq x < 2, \\ x+1, & x < -1. \end{cases}$$

Получаем, что график функции совпадает с прямой $y = x + 1$ при $x < -1$, совпадает с прямой $y = -x - 1$ при $-1 \leq x \leq 2$ и совпадает с прямой $y = x - 5$ при $x > 2$.

График _____ изображен _____ на



рисунке.

Прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки при $m = -3$ или $m = 0$.

Ответ: $m = -3$, $m = 0$.

Задание 22

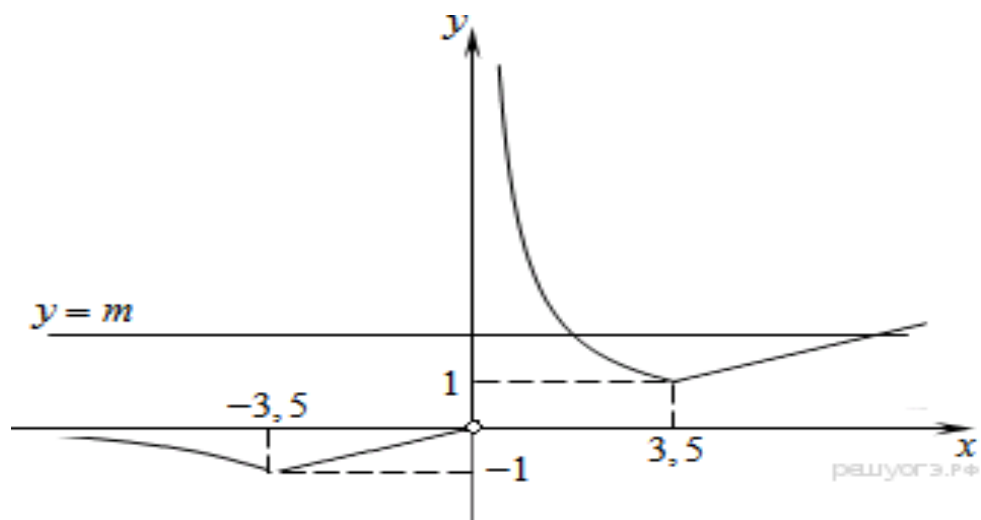
Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} \right| + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Раскроем модуль:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} \right| + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{3,5}{x} - \frac{x}{3,5} + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right), & \text{при } x \leq -3,5 \text{ и } 0 < x < 3,5, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right), & \text{при } -3,5 < x < 0 \text{ и } x \geq 3,5 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{3,5}{x}, & \text{при } x \leq -3,5 \text{ и } 0 < x < 3,5, \\ \frac{x}{3,5}, & \text{при } -3,5 < x < 0 \text{ и } x \geq 3,5. \end{cases} \end{aligned}$$

Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $m = -1$ и $m = 1$.

Ответ: $-1; 1$.

Графический способ решения неравенств. (№15).

Прасолова Елена Александровна,
учитель математики высшей
квалификационной категории
МБОУ «Новожедринская СОШ»

Графический способ решения неравенств обучающимися не приветствуется. В большей степени это связано со слабым знанием свойств функций. Прежде чем приступить к рассмотрению подобного рода заданий, рассмотрим результативность выполнения заданий ЕГЭ за последние 2 года в Матвеевском районе. Данные представлены в диаграмме ниже.

Диаграмма №1.



Согласно этим данным, выполнение задания №15 практически не изменилось. К нулевым результатам приводило не только арифметические ошибки, но и невнимательность, что можно расценить, как не знание свойств функций. Логарифмические неравенства последних двух лет в задании №15, показали слабое владение обучающимися свойствами функций и использовании их при решении неравенства.

Рассмотрим критерии, по которым оценивается задание №15:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки x_0 (обе части неравенства при этом значении имеют смысл) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Согласно этим критериям, задание считается выполненным, если обоснованно получен верный ответ. За последние два года в логарифмических неравенствах детьми не было учтено свойство функции и связанные с ней ограничения.

Что можно ожидать в качестве задания 15 на экзамене?

Задание 15

Тип задания по кодификатору требований

Неравенство или система неравенств.

Характеристика задания

Неравенство или система неравенств, содержащие степени, дроби, корни, логарифмы (в том числе с переменным основанием).

В связи с проблемами с решением неравенств, рассмотрим особенности начальной подготовки к овладению методами решения задания №15.

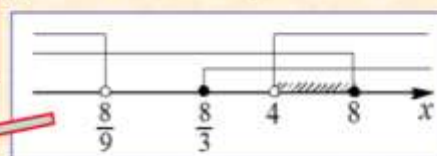
Нюансы начальной подготовки к овладению методами решения задания 15

С чего следует начинать?

1. Научить решению простейших рациональных неравенств.
2. Полезно решать «обратные» задачи: составлять неравенства по ответу, заданному в виде системы неравенств или картинки.

$$\begin{cases} x \geq \frac{8}{3}, \\ x \leq 8, \\ (9x-8)(x-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \leq 8.$$

На рис. представлена графическая интерпретация получения решения данной системы неравенств.



$$2\sqrt{8-x} < 3x-8$$

3. Обучение необходимо начинать со знакомства с основными методами решений неравенств, с заданий, направленных на

Надо уметь без ошибок решать простые неравенства, часто возникающие в процессе решения более сложных.

Решить неравенство:

а) $1 < x \leq 5$; б) $0 \leq 0$; в) $2^x \geq 0$; г) $\sqrt{x} > 1$; д) $\frac{x}{x} \neq 2$.

Для того чтобы избежать недоразумений, достаточно лишь ясно понимать, что нестрогое неравенство справедливо как в случае соответствующего строгого неравенства, так и в случае равенства, но никак не в случае одновременного их выполнения, а также не забывать отбрасывать те значения неизвестной, которые не входят в ОДЗ.

Ответ:

а) $(1; 5]$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(1; +\infty)$; д) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

При решении различных неравенств и их систем на этапе получения ответа, в частности нанесения их решений на одну числовую прямую, приходится сравнивать числовые значения, соответствующие концам промежутков, из которых состоят соответствующие множества решений, или выбирать из нескольких корней наибольший (наименьший).

Нужно знакомить учащихся с методами сравнения числовых выражений:

- сравнения с нулем разности выражений;
- сравнения с единицей отношения выражений;
- деления выражений;
- использования свойств функций и графиков;
- классических неравенств и т.д.

Графический метод имеет следующие преимущества:

А) Построив графики функций, входящих в неравенство, можно определить, как влияет на решение их взаимное расположение.

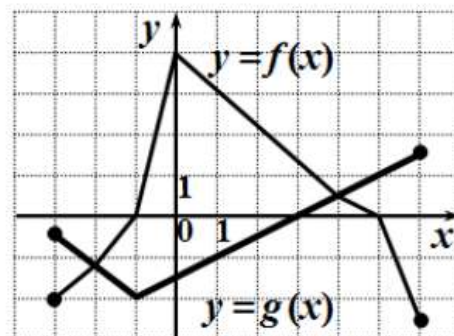
Б) График иногда позволяет аналитически сформулировать необходимые и достаточные условия для решения задачи, т.е. их эффективно применяются для изображения результатов исследования там, где чисто аналитическая запись громоздка.

В) Ряд утверждений позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные заключения о решениях неравенства.

20

На рис. изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3; 6]$. Решите неравенство $f(x) > g(x)$.

Ответ: $(-2; 4)$.



21 (МФТИ, 2009). Решите неравенство $\log_{|x|}(\sqrt{x+5}+4) \geq 2\log_{x^2}(2x+8)$.

ОДЗ неравенства определяется условиями $x \neq 0$, $|x| \neq 1$, $x \geq -5$, $x > -4$, и является множеством $(-4; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

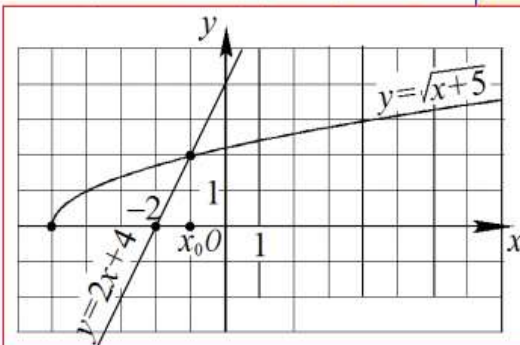
Рассмотрим два случая.

1. Пусть $|x| > 1$. В этом случае исходное неравенство равносильно неравенству $\log_{|x|}(\sqrt{x+5}+4) \geq \log_{|x|}(2x+8) \Leftrightarrow \sqrt{x+5} \geq 2x+4 (*)$.

Построим графики функций $y = \sqrt{x+5}$ и $y = 2x+4$ (см. рис.).

Уравнения $\sqrt{x+5} = 2x+4$ имеет корень -1 . С учетом ОДЗ и условия $|x| > 1$ получаем решение (*): $-4 < x < -1$.

2. Пусть $0 < |x| < 1$. Исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{x+5} \leq 2x+4$. Откуда (см. рис.) следует $x \geq -1$. С учетом области определения неравенства при условии $0 < |x| < 1$ находим множество решений неравенства, которое является объединением интервалов $(-1; 0)$ и $(0; 1)$.



Графический метод решения задач с параметрами. (№18).

Чурсин Игорь Иванович,
учитель математики высшей
квалификационной категории
МБОУ «Кинельская СОШ».

Графический метод решения задач используется не только в задачах с параметром, но и для решения обыкновенных уравнений, систем уравнений или неравенств. Он входит в стандартный курс школьной программы и наверняка вы с ним сталкивались, но в несколько упрощенном варианте. Сначала я кратко напомним, в чем заключается этот метод. Затем разберем, как его применять для решения задач с параметром, и рассмотрим несколько типовых примеров.

Для начала рассмотрим уравнение с одной переменной $f(x)=0$

Для того чтобы решить его графическим методом, нужно построить график функции $y=f(x)$. Точки пересечения графика с осью абсцисс (ось x) и будут решениями нашего уравнения. Или рассмотрим уравнение $f(x)=g(x)$. Точно так же строим на одной координатной плоскости графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, абсциссы точек их пересечения будут решениями уравнения.

Стоит отдельно отметить, что для решения графическим методом необходимо выполнять очень качественный и точный рисунок.

Пример 1 Решить графическим методом уравнение $x^2+3x=5x+3$.

Решение: Построим на одной координатной плоскости графики функций $y=x^2+3x$ и $y=5x+3$.

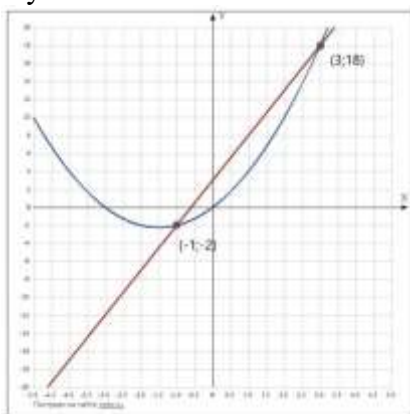


Рис. 1 $y=5x+3$ – красный график; $y=x^2+3x$ – синий график.

Из Рис.1 видно, что графики пересекаются в точках $(-1;2)$ и $(3;18)$. Таким образом, решением нашего уравнения будут: $x_1=-1$; $x_2=3$. **Ответ:** $x_1=-1$; $x_2=3$.

Теперь рассмотрим уравнение с двумя переменными $f(x,y)=0$. Решением этого уравнения будет множество пар точек (x,y) , которые можно изобразить в виде графика на координатной плоскости (xOy). Если решать это уравнение аналитически, то, как правило, мы выражаем одну переменную через другую ($x,y=f(x)$) или ($x=f(y),y$). В качестве примера рассмотрим обыкновенное линейное уравнение $2x-5y=10$. (1) Выражаем $x=(10+5y)/2$ – это называется общим решением уравнения. Изобразим его на координатной плоскости, построив график (Рис. 2):

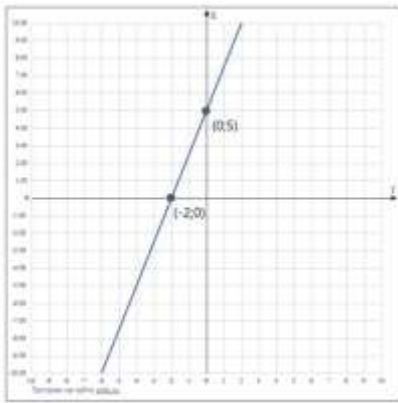


Рис. 2

Все точки, принадлежащие этому графику, будут решениями нашего уравнения.

Например, при $x=0 \Leftrightarrow y=-2$. Аналогично можно выразить $y=(2x-10)/5$. График будет выглядеть так (Рис. 3):

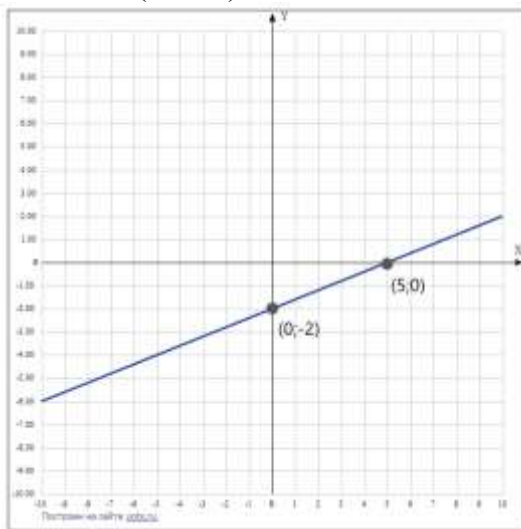


Рис. 3

И, разумеется, будет задавать точно такие же пары решений x и y .

Слайд 3. Теперь перейдем к уравнениям с параметром. Заметим, что параметр – это обычная переменная, которая ничем не отличается от рассмотренных выше переменных x и y . Поэтому, если мы вместо y в уравнении (1) запишем параметр a , то суть уравнения от этого не поменяется. То есть уравнение (1) можно рассматривать относительно x с параметром y или наоборот. В дальнейшем параметр будем обозначать за a .

Слайд 4. Разберем уравнение с параметром $6x-5a=15$. Будем работать в системе координат (aOx) . Выразим $x=(15+5a)/6$ – это будет общий вид решения. Для того чтобы проиллюстрировать ответ, построим график $x(a)$ (Рис. 4).

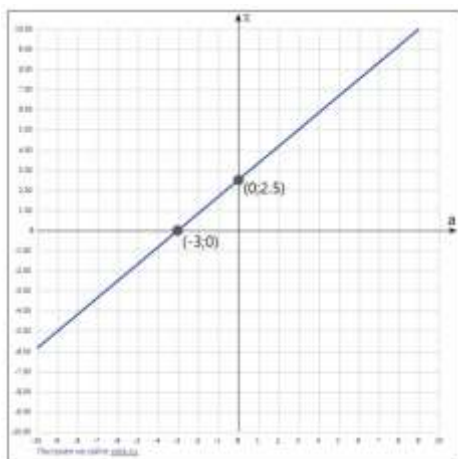


Рис. 4

Пример 2

Найти все значения параметра a , при которых корни уравнения $6x - 5a = 15$ лежат на отрезке $[-5; 5]$. График $x(a)$ для этого же примера на рисунке 4.

Слайд 5. Иногда для решения удобно построить график зависимости $a(x)$: $a = (6x - 15)/5$. Давайте так и поступим. Построим график (Рис. 5). И красной областью покажем интервал, который нас интересует по условию задачи. Из рисунка видно, что $a \in [-9; 3]$ (при $x = 5 \Leftrightarrow a = 3$; и при $x = -5 \Leftrightarrow a = -9$)

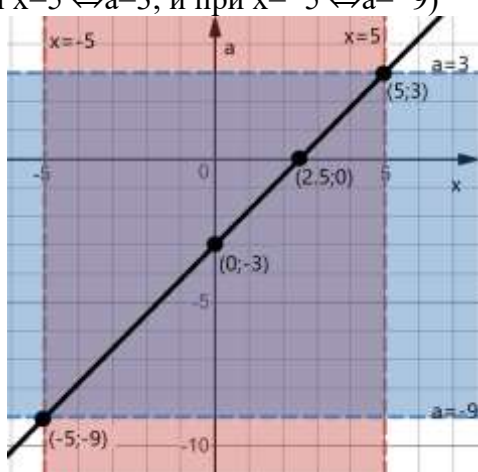


Рис. 5

На мой взгляд, будет более наглядно, если показывать графический метод на примерах. Поэтому, давайте разберем примеры от простых к сложным, которые могут встретиться на ЕГЭ.

Пример 3 Слайд 6.

Определить, при каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 3x - 2a = 0$ имеет: а) 2 корня; б) 1 корень; в) не имеет корней;

Решение:

1 способ решения:

Приведем уравнение к виду $x^2 - 3x = 2a$. И построим графики $y = 1/2 \cdot (x^2 - 3x)$ (показан красной линией) и $y = a$ (синяя линия). Обратите внимание, график $y = a$ – это просто семейство прямых параллельных оси x в плоскости (xOy) (Рис. 6). Точки пересечения красной линии с семейством синих линий – это корни нашего уравнения. Если, например, $a = 5$, то графики $y = 5$ и $y = 1/2 \cdot (x^2 - 3x)$ имеют две общие точки, а значит, и два решения. При $a = -1.125$ оба графика имеют только одну общую точку $(1.5; -1.125)$ – это единственное решение.

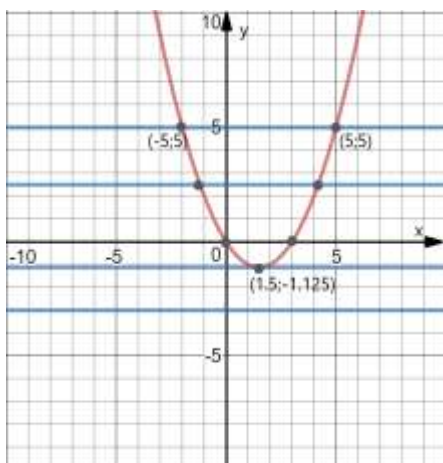


Рис. 6

Ответ:

При $a > -1.125$ уравнение имеет два корня;

При $a = -1.125$ уравнение имеет один корень;

При $a < -1.125$ уравнение не имеет корней.

2 способ решения:

Таким же образом можно решить данное уравнение, построив графики в плоскости (xOa) . Для этого выразим $a = 1/2 \cdot (x^2 - 3x)$.

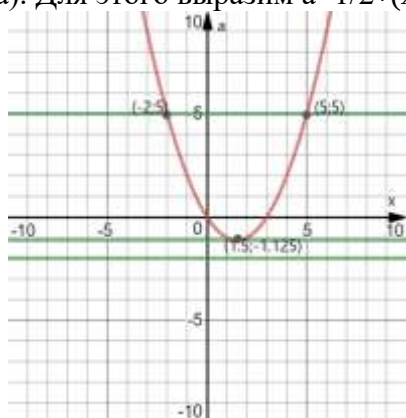


Рис. 7

Различным значениям параметра a можно поставить значения искомого x , для это проведем горизонтальные линии.

Ответ:

При $a > -1.125$ уравнение имеет два корня;

При $a = -1.125$ уравнение имеет один корень;

При $a < -1.125$ уравнение не имеет корней.

Слайд 7. Пример 4 Решить уравнение: $\cos^2 x - 2\cos x + a = 0$

Сделаем замену $t = \cos x$, тогда $t^2 - 2t + a = 0$, при $t \in [-1; 1]$.

Построим в плоскости (tOa) график нашей функции $a = 2t - t^2$:

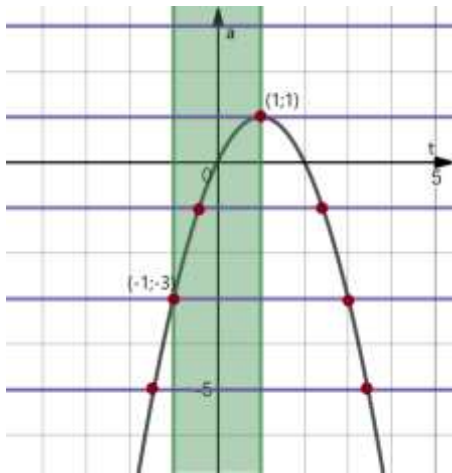


Рис.8

Точки пересечения горизонтальных (фиолетовых) прямых с графиком нашей функции соответствуют решениям. Но $t \in [-1; 1]$, покажем это при помощи зеленой области (Рис.8).

Таким образом, нас устраивают решения, которые принадлежат кусочку параболы, попавшей в зеленую область. Как видно из рисунка, a может принимать значения $a \in [-3; 1]$, и каждому значению a из этой области соответствует единственное решение.

Найдем его, решив уравнение $t^2 - 2t + a = 0$;

$t_1 = (4 - \sqrt{4 - 4a})/2$; $t_2 = (4 + \sqrt{4 - 4a})/2$. t_2 не подходит, так как он не удовлетворяет условию $t \in [-1; 1]$. Сделаем обратную замену: $\cos x = (4 - \sqrt{4 - 4a})/2$; $x = \pm \arccos((4 - \sqrt{4 - 4a})/2) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: При $a \in [-3; 1]$; $x = \pm \arccos((4 - \sqrt{4 - 4a})/2) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Слайд 8. Пример 5 Решить уравнение $9^{-|x+1|} - 3^{|x+1|} - a = 0$.

Сделаем замену $t = 3^{-|x+1|}$, получим $t^2 - 3t - a = 0$, где $t \in (0; 1]$.

Построим график функции $a(t) = t^2 - 3t$, при $t \in (0; 1]$ в системе координат $(t|Oa)$.

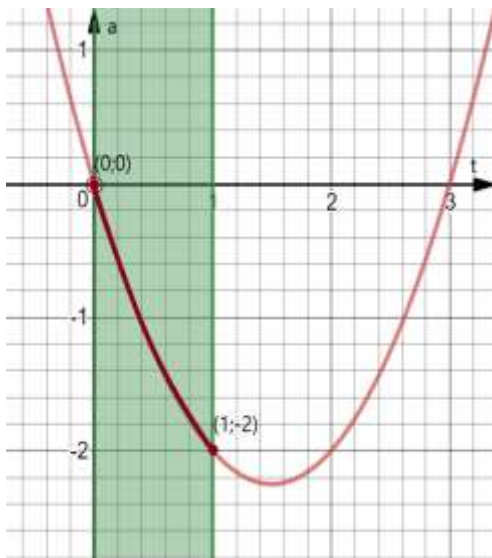


Рис.10

Зеленой областью покажем допустимый интервал, в котором могут находиться корни.

Выделенная часть параболы соответствует корням нашего уравнения при $a \in [-2; 0]$. Таким образом, при $a < -2$ и $a \geq 0$ корней нет.

Решим уравнение $t^2 - 3t - a = 0$. При $a \in [-2; 0]$ $t_1 = (3 - \sqrt{9 + 4a})/2$; $t_2 = (3 + \sqrt{9 + 4a})/2$, так как $t \in (0; 1]$, то t_2 не подходит.

Сделаем обратную замену:

$3^{-|x+1|} = (3 - \sqrt{9 + 4a})/2$; $-|x+1| = \log_3((3 - \sqrt{9 + 4a})/2)$; $|x+1| = -\log_3((3 - \sqrt{9 + 4a})/2)$;
 $x = -1 \pm \log_3((3 - \sqrt{9 + 4a})/2)$.

Ответ: $x = -1 \pm \log_3((3 - \sqrt{9 + 4a})/2)$ при $a \in [-2; 0)$.

Слайд 9. Пример 6 Решить уравнение $\sqrt{a(3^x + 1)} + 9 = 2 - 3^x$.

Сделаем замену $t = 3^x, t > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a(t+1)} + 9 = 2 - t$.

Данному уравнению равносильна система:

$$\begin{cases} a(t+1) + 9 = (2-t)^2 \\ 2-t \geq 0 \\ t > 0 \end{cases} \begin{cases} a = (t-5)(t+1)/(t+1) \\ 0 < t \leq 2 \end{cases} \begin{cases} a = t-5 \\ 0 < t \leq 2 \end{cases}$$

Построим множество точек, которые удовлетворяют полученной системе:

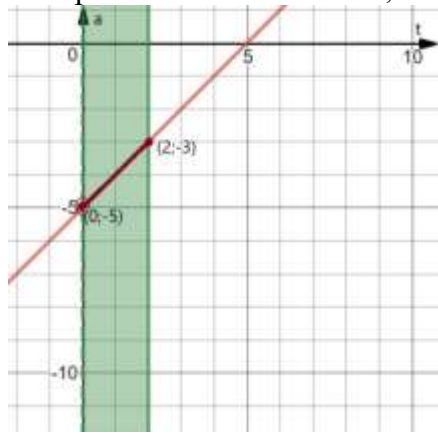


Рис.11

При $a \in (-5; -3] \Leftrightarrow t = a + 5$, сделаем обратную замену $3^x = a + 5, \Leftrightarrow x = \log_3(a + 5)$.

При $a \in (-\infty; -5] \cup (-3; +\infty)$ корней нет.

Ответ: При $a \in (-5; -3] \Leftrightarrow x = \log_3(a + 5)$.

Слайд 10. Пример 7 Решить неравенство $9^x - (a-1)3^x - a \geq 0$

Сделаем замену: $t = 3^x, \Leftrightarrow t > 0$; Получаем $\begin{cases} t^2 - (a-1)t - a \geq 0 \\ t > 0 \end{cases} \quad t(t+1) \geq a(t+1);$

Заметим, что решение $t = -1$ не подходит, так как $t > 0$. Поделим наше неравенство на $t+1$.

Так как $t+1 > 0$, то знак неравенства не меняется. Будьте внимательны! В случае, когда нам неизвестен знак выражения, на которое мы делим неравенство, необходимо рассмотреть два случая, когда выражение отрицательно (меняем знак неравенства) и когда положительно (не меняем).

$$\begin{cases} t \geq a \\ t > 0 \end{cases}$$

Построим график, получившейся системы неравенств на плоскости (t, a) .

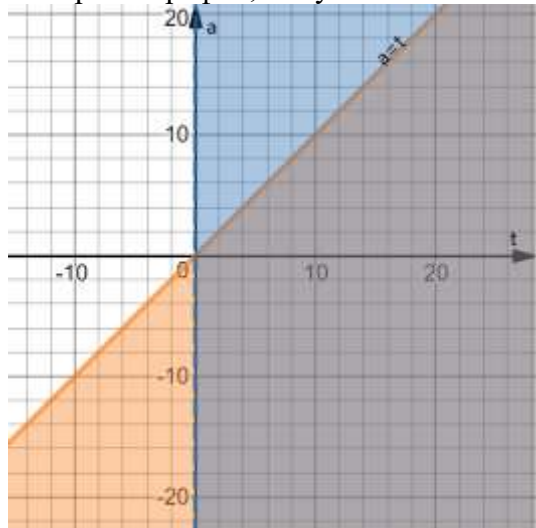


Рис.12

Оранжевой областью выделено решение первого неравенства системы, синей областью – второго неравенства. Их пересечение – это решение всей системы.

Получаем, что при $a \leq 0 \quad t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3^x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; +\infty)$

При $a > 0 \quad t \in [a; +\infty) \Leftrightarrow 3^x \geq a \Leftrightarrow x \geq \log_3 a$.

Ответ: при $a \leq 0 \quad x \in (-\infty; +\infty)$ при $a > 0 \quad x \geq \log_3 a$.

Пример 8 Слайд 11

Найти количество решений системы $\begin{cases} y = p + 3 + x, \\ \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{cases}$ при любых значениях параметра p .

p .

Решение:

Преобразуем исходную систему

$$\begin{cases} y = p + 3 + x \\ y \geq 1 \\ x + 1 = \frac{1}{4}(y - 1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = p + 3 + x \\ y \geq 1 \\ x = \frac{1}{4}(y - 1)^2 - 1 \end{cases}$$

Изобразим решение системы на плоскости (xOy). Отметим, что уравнение $y = p + 3 + x$ задает семейство прямых для различных значений параметра p и углом наклона $k=1$.

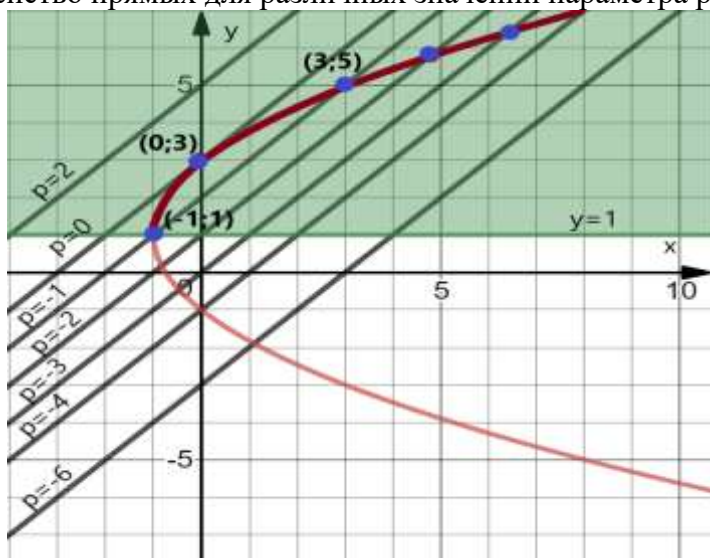


Рис. 18

Точки пересечения семейства прямых $y = p + 3 + x$ с графиком функции $x = \frac{1}{4}(y - 1)^2 - 1$ и удовлетворяющих $y \geq 1$ будут решениями системы.

Зеленым покажем область, в которой наша система имеет решения. Синие точки – возможные решения при различных p .

Теперь проанализируем график на количество решений при различных значениях параметра. Для этого сначала найдем такие p , при которых прямые $y = p + 3 + x$

будут касаться параболы, просто решив систему $\begin{cases} y = p + 3 + x \\ x = \frac{1}{4}(y - 1)^2 - 1 \end{cases}$

с учетом, что корень должен быть всего один (дискриминант равен 0).

$$\begin{cases} x = y - p - 3 \\ y - p - 3 = \frac{1}{4}(y - 1)^2 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y - p - 3 \\ y^2 - 6y + 4p + 9 = 0 \end{cases} \quad D = 36 - 4(4p + 9) = -16p = 0; \quad p = 0.$$

Таким образом, прямая $y = x + 3$ будет касательной к графику функции $x = \frac{1}{4}(y - 1)^2 - 1$ в точке $(0; 3)$. При $p = 0$ будет одно решение системы. Теперь обратим внимание, что при $p > 0$ семейство прямых $y = p + 3 + x$ не будет пересекать параболу, а значит и не будет решений.

Через точку параболы $(-1;1)$ проходит прямая при $p=-1$. Значит при $p \in [-1;0)$ система будет иметь два решения.

И, наконец, при $p < -1$ система будет иметь одно решение.

Ответ: $p > 0$ решений нет; $p = 0$ и $p < -1$ одно решение; $p \in [-1;0)$ два решения.