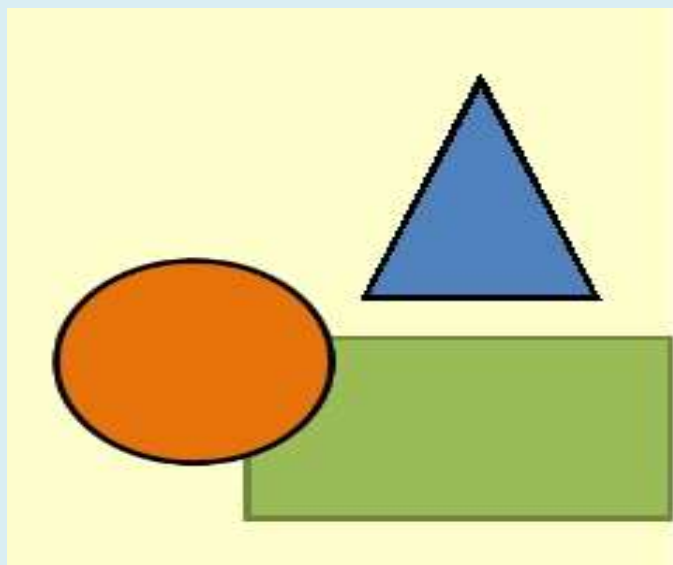
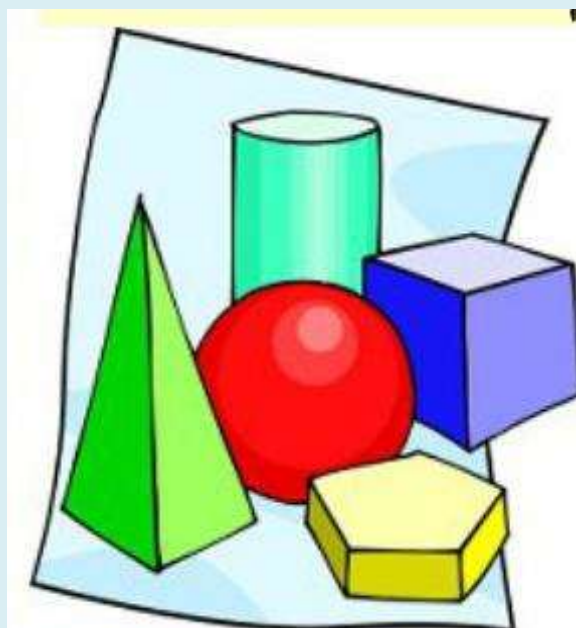


**Управление образования администрации
муниципального образования Абдулинский городской округ
Оренбургской области**



***Решение планиметрической задачи
при подготовке к ЕГЭ***



Содержание

1. Введение
2. Критерии оценивания планиметрических задач
3. Методические приемы решения планиметрических задач повышенной сложности
4. Практикум по решению задач типа:
 - «Многоугольники и их свойства»
 - «Окружности и системы окружностей»
 - «Окружности и треугольники»
 - «Окружности и четырёхугольники»
5. Задачи с ответом
6. Задачи для самостоятельного решения
7. Справочный материал



В планиметрических заданиях заметное структурное и содержательное изменение произошло в 2014 году. В пункте *а* теперь нужно доказать геометрический факт, в пункте *б* – найти (вычислить) геометрическую величину.

С точки зрения разработчиков включение проверяемого элемента на доказательство в задание 16 должно повысить уровень подготовки школьников. Кроме того, такое доказательство является естественным продолжением практики использования заданий на доказательство в экзамене за курс основной школы. По фактическим данным выполнения задание 16 является границей, разделяющий высокий и повышенный уровень подготовки участников ЕГЭ.

При подготовке к сдаче ЕГЭ и обучении решению задач 16 следует отметить, что для выполнения первого пункта задачи нужно помнить основные определения, теоремы и следствия из них, а также признаки и свойства геометрических фигур. В основном первая часть решения сводится к доказательству одного из следующих свойств приведенной в условии геометрической конфигурации:

- а) подобия указанных треугольников;
- б) параллельность или перпендикулярность указанных прямых;
- в) равенство указанных углов, отрезков, площадей или их заданное отношение;
- г) принадлежность указанной фигуры к определенному типу:
 - треугольник является прямоугольным, равнобедренным и т.д.;
 - четырехугольник является описанным или вписанным;
 - четырехугольник обладает признаками параллелограмма, ромба, трапеции и т.д.;
 - точка равноудалена от вершин или сторон многоугольника, то есть является центром вписанной или описанной окружностей;
 - прямая содержит указанные точку или отрезок.

Памятка решения геометрических задач.

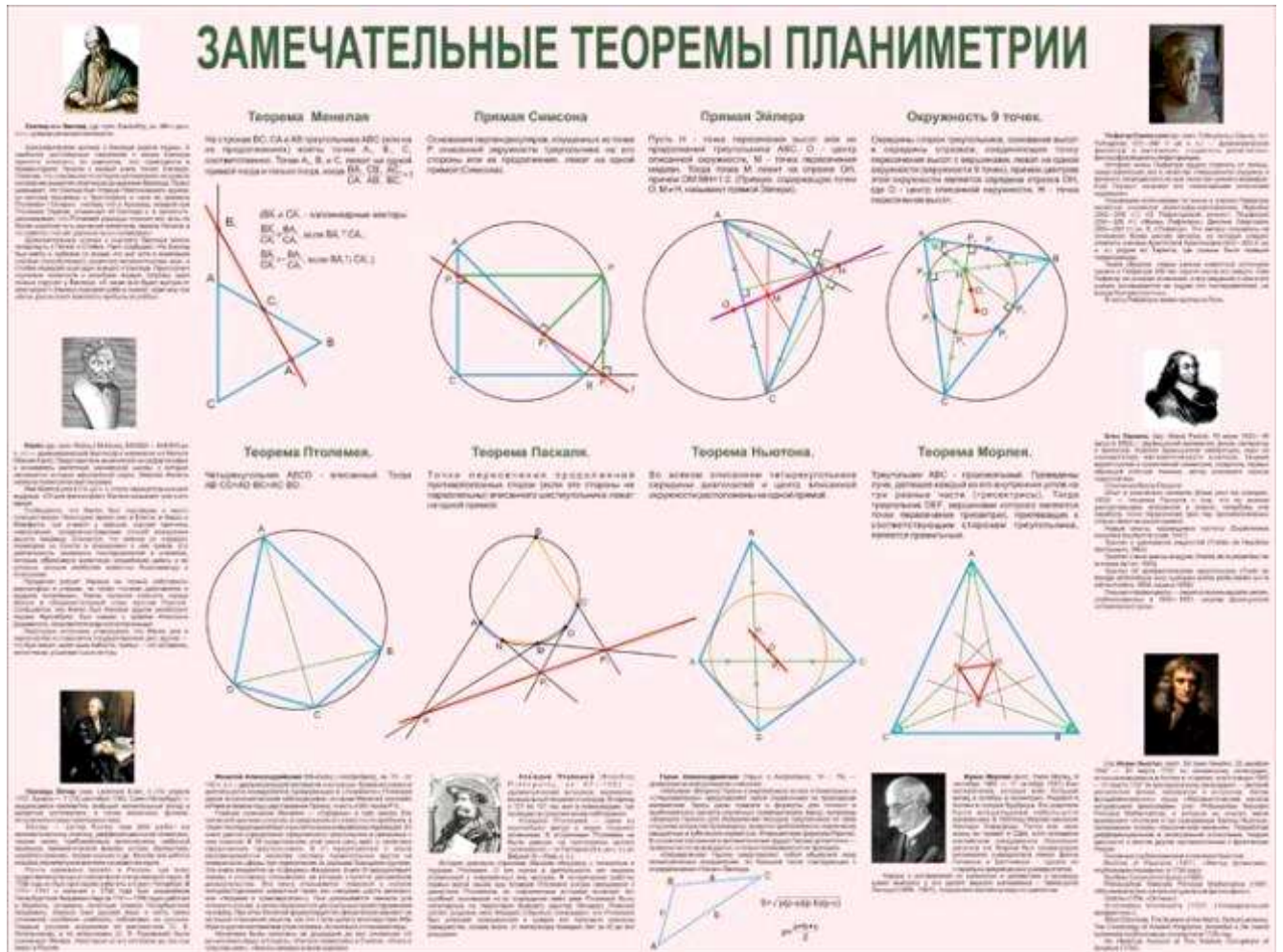
- 1) Чтение условия задачи.
- 2) Выполнение чертежа с буквенными обозначениями.
- 3) Краткая запись условия (база знаний)
- 4) Детализовка – вычерчивание отдельных деталей на дополнительных чертежах; исходная сложная задача разбивается на несколько простых
- 5) Составление цепочки действий
- 6) Реализация алгоритма решения
- 7) Проверка правильности решения (логику доказательства, найденные величины имеют геометрический смысл)
- 8) Ответ

Критерии оценивания задания №16 ЕГЭ
(Планиметрическая задача)

Содержание критерия, задание №16	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3



1. «Многоугольники и их свойства»
2. «Окружности и системы окружностей»
3. «Окружности и треугольники»
4. «Окружности и четырёхугольники»



Методические приемы решения планиметрических задач повышенной сложности

Задача 1 (медианы в треугольнике).

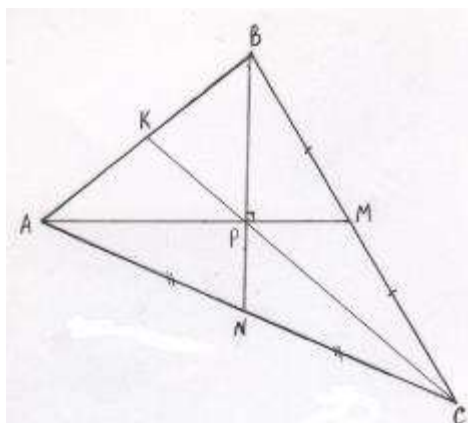
Медианы AM и BN треугольника ABC перпендикулярны и пересекаются в точке P .

а) Докажите, что $CP=AB$.

б) Найдите $S_{\triangle ABC}$, если известно, что $AC=6$ и $BC=7$.

Повторить. 1) медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2:1; 2) медиана прямоугольного треугольника, проведенная к

гипотенузе, равна ее половине; 3) каждая медиана делит треугольник на два, равных по площади.



Решение

1) Так как медианы треугольника пересекаются в одной точке, то CP – это отрезок медианы. Пусть CP пересекается с AB в точке K, тогда CK – медиана треугольника и $CP = \frac{2}{3}CK = 2PK$ (свойство медиан)

2) PK – медиана прямоугольного треугольника ABR, поэтому $PK = 0,5AB$.

3) Из 1) и 2) $\Rightarrow AB = 2PK = CP$.

Пункт а) доказан.

б) 1) Пусть $BP=2x$, $PN=x$, $AP=2y$, $PM=y$. Применяя теорему Пифагора для треугольников BMR и APN, получим систему

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ 4y^2 + x^2 = 3^2 \end{cases} \Rightarrow 5x^2 + 5y^2 = \frac{85}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{17}{4}$$

$$3x^2 = \frac{49}{4} - \frac{17}{4} \Rightarrow 3x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$3y^2 = \frac{36}{4} - \frac{17}{4} \Rightarrow 3y^2 = \frac{19}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{19}{12} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{3}}$$

2) AM – медиана треугольника ABC, поэтому площадь треугольника ABM равна

$$S = \frac{1}{2}AM \cdot BP = \frac{1}{2} \cdot 3y \cdot 2x = 3xy = 3 \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{3}} = \sqrt{38}$$

Значит, площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{38}$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{38}$

Задача 2 (метод площадей).

Окружность с центром O, вписанная в $S_{\triangle ABC}$ касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q. Отрезки OC и QP

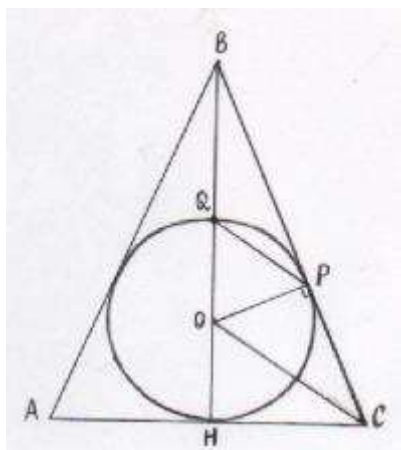
а) Доказать: $S_{\triangle ABC}$ – равнобедренный

б) Найти $S_{\triangle BPQ}$, если точка O делит высоту BH в отношении BO: OH=3:1, AC=2a.

Повторить. Для доказательства пункта а) необходимо вспомнить признаки равнобедренного треугольника: если высота и биссектриса, проведенная к одной стороне, совпадают, то такой треугольник является равнобедренным.

Решение

а) 1) $\triangle ABC$ – описанный около окружности, поэтому O – точка пересечения биссектрис.



2) $OP \perp BC$ (радиус, проведенный в точку касания), значит $\triangle BPO$ – прямоугольный.

3) Пусть углы ACO и BCO равны α , тогда угол COP равен $90^\circ - \alpha$ и равен углу OPQ , так как $OC \parallel QP$, углы OPQ и COP – накрест лежащие.

$\triangle QOP$ – равнобедренный, так как $OQ = OP$ (радиусы).
 $\angle QOP = 180^\circ - 2\angle OPQ = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$

4) Пусть BO пересекается с AC в точке H . Рассмотрим треугольники BOP и BCH . У них угол при вершине B общий, $\angle BOP = \angle BCH = 2\alpha$. Значит, $\triangle BOP$ подобен $\triangle BCH$ по двум углам. Следовательно, $\angle BHC = \angle BPO = 90^\circ$

5) Рассмотрим треугольник ABC . У него BH является биссектрисой и высотой. Поэтому по признаку равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ – равнобедренный. Пункт а) доказан.

б) При нахождении $S_{\triangle BQR}$ будем использовать «метод площадей»: если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведения сторон, содержащих этот угол, то есть если $\frac{BA_1}{BA} = k$ и $\frac{BC_1}{BC} = m$, то $S_{A_1BC_1} = km S_{ABC}$.

1) $\triangle ABC$ – равнобедренный (см. пункт а), BH – высота, $\Rightarrow BH$ – медиана. Если $AC = 2a$ по условию, то $HC = a$.

2) $HC = CP = a$ (свойство отрезков касательных)

3) CO – биссектриса $\triangle BHC$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BO}{OH} = \frac{BC}{CH} = 3:1$ (по условию).

Поэтому $BC = 3a$, тогда $BP = BC - PC = 3a - a = 2a$. С другой стороны $\frac{BO}{OH} = \frac{BQ + QO}{OH} = \frac{BQ}{OH} + 1 =$

3, $\frac{BQ}{OH} = 2$; $BQ = 2OH = QH$. Значит, $BQ = 0,5BH$

$$S_{\triangle BHC} = 0,5 \cdot BH \cdot HC = 0,5 \sqrt{BC^2 - HC^2} \cdot HC = 0,5 \sqrt{8a^2} \cdot a = a^2 \sqrt{2}$$

$$4) BQ : BH = 1 : 2; BP : BC = 2 : 3. \text{ Поэтому } S_{BQP} = 0,5 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2} a^2 = \frac{\sqrt{2} a^2}{3}.$$

Задача в пункте б) может быть решена другими способами. Например, $\triangle OHC$ и $\triangle BHC$ имеют общую высоту HC . $\frac{S_{OHC}}{S_{BHC}} = \frac{OH}{BH} = \frac{1}{4}$. $S_{OPC} = S_{OHC}$. Поэтому $S_{BPO} = 0,5 S_{BHC}$. Аналогично, $S_{BQP} = \frac{2}{3} S_{BPO}$. Значит, $S_{BQP} = \frac{1}{3} S_{BHC} = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{2}$

Возможно и третье решение. Из треугольника BHC найти синус угла HBC , далее, вычислив стороны BQ и BP треугольника BQP , найти его площадь

$$S_{BQP} = \frac{1}{2} BQ \cdot BP \cdot \sin \angle QBP$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2} a^2}{3}$

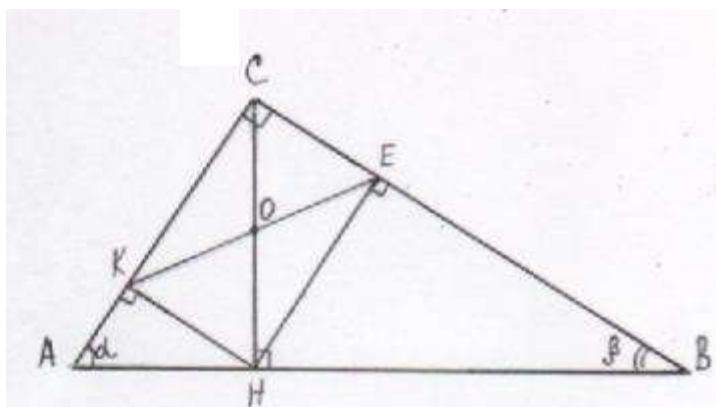
Задача 3 (вписанный четырехугольник).

На гипотенузу AB прямоугольного $\triangle ABC$ опустили высоту CH . Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE

- Доказать, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности,
- Найти радиус этой окружности, если $AB=12$, $CH=5$.

Повторить. Свойство вписанного четырехугольника: сумма противоположных углов равна 180° , справедливо и обратное.

Решение



а) Если точки A, B, K и E лежат на одной окружности, то четырехугольник $ABKE$ – вписанный.

1) Пусть угол A равен α , угол B равен β , тогда $\alpha + \beta = 90^\circ$. Используя свойство прямоугольного треугольника (сумма острых углов равна 90°) и далее в $\triangle ACH$, $\triangle KCH$, $\triangle CHB$ и $\triangle CHE$, получим

$$\angle CHK = \alpha, \quad \angle CHE = \beta$$

2) Четырехугольник КСЕН – прямоугольник, поэтому его диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам. Значит, $\triangle ONE$ и $\triangle ONK$ равнобедренные $\angle OKN = \angle ONK = \alpha$, $\angle ONE = \angle OEN = \beta$ (как углы при основании).

3) В четырехугольнике АКЕВ: $\angle A + \angle КЕВ = \alpha + 90^\circ + \beta = 180^\circ$, $\angle В + \angle АКЕ = \alpha + 90^\circ + \beta = 180^\circ$. Значит, около АКЕВ можно описать окружность. Пункт а) доказан.

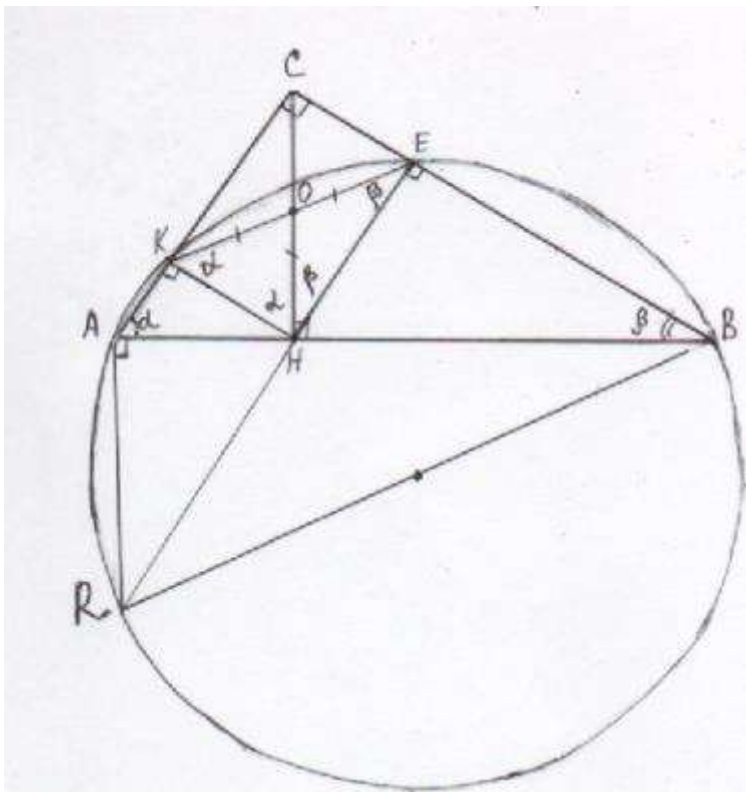
б) 1) Нарисуем окружность. Проведем AR перпендикулярно АВ, точка R принадлежит окружности. Угол RAB равен 90° - вписанный, поэтому опирается на диаметр окружности RB.

Угол НЕВ равен 90° , поэтому точки R, Н и Е лежат на одной прямой

2) АСНR – параллелограмм, противоположные стороны его равны. AR=CH=5

3) По теореме Пифагора из $\triangle ARB$ получим, что $BR = \sqrt{AR^2 + AB^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$. Значит $R_{окр} = 0,5$ $BK = 6,5$

Другой способ нахождения радиуса окружности: из $\triangle ACB$ найти угол α , его катеты и AE . В $\triangle AKE$ $\angle AKE = 90^\circ + \alpha$. Треугольник AKE вписанный в данную окружность. По следствию из теоремы синусов $\frac{AE}{\sin \angle AKE} = 2R$



Ответ: 6,5.

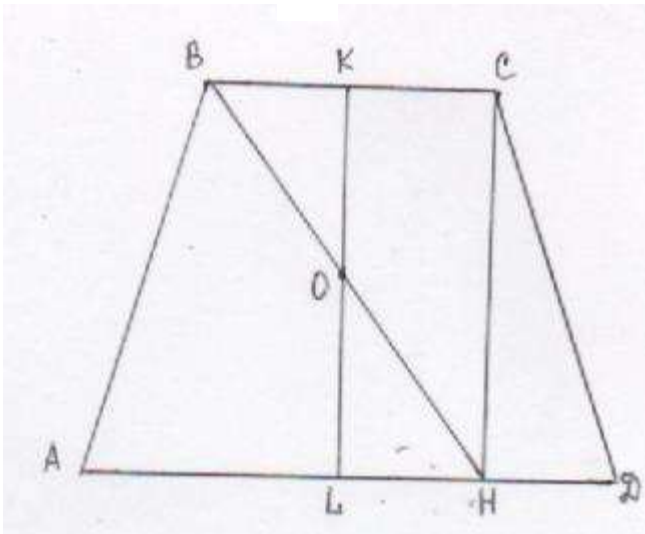
Задача 4 (описанный четырехугольник).

В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность, CH – высота трапеции.

а) Доказать, что центр окружности, вписанной в трапецию, лежит на отрезке $ВН$.

б) Найдите диагональ AC , если известно, что средняя линия трапеции равна $\sqrt{6}$, а угол AOD равен 135° , где O – центр окружности, вписанной в трапецию, AD – большее основание.

Решение.



а) 1) Пусть точки K и L – точки касания окружности оснований трапеции, тогда

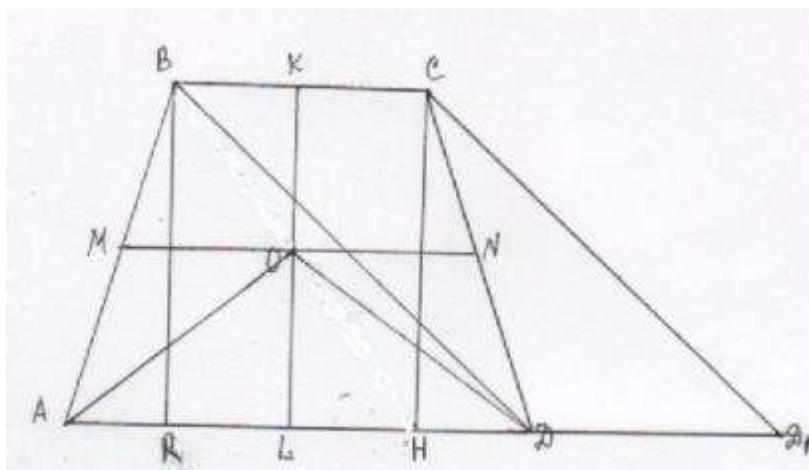
$$OK = OL = r_{\text{впис}}$$

2) $\triangle BOK = \triangle HOL$ по катету (см. пункт 1) и острому углу (углы OBK и LHO равны как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BH). Поэтому $BO = OH$.

3) Центр вписанной в трапецию окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов трапеции. Данная трапеция $ABCD$ – равнобедренная, поэтому углы OBK и OCK равны. Значит, треугольники $\triangle BOK$ и $\triangle COK$ равны (по катету и острому углу)

4) Из 2) и 3) следует, что $BO = OC = OH$. Точка O равноудалена от вершин прямоугольного треугольника $\triangle BCH$. O – центр описанной около треугольника окружности. Следовательно O принадлежит BH (его середина). Пункт а) доказан.

б) Для доказательства пункта б) сделаем дополнительный чертеж



- 1) Пусть MN – средняя линия трапеции. Точка O принадлежит MN и O – её середина, поэтому $MO = \frac{\sqrt{6}}{2}$
- 2) AO – биссектриса, углы MAO и RAO равны, углы RAO и MOA равны как накрест лежащие. $\triangle AMO$ – равнобедренный, $AM = MO = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Тогда $AB = 2AM = \sqrt{6}$
- 3) $\angle AOD = 135^\circ$ (по условию), $\angle OAD + \angle ODA = 45^\circ$. Значит, $\angle BAD = \angle CDA = 45^\circ$. Пусть BR перпендикулярен AD . $BR = AR = \sqrt{3}$
- 4) Пусть $CD_1 \parallel BD$ и точка D_1 лежит на прямой AD . Четырехугольник BCD_1D – параллелограмм. $CD_1 = BD$ (противоположные стороны), $BD = AC$ (диагонали равнобедренной трапеции). Тогда $CD_1 = BD = AC$.
- 5) $\triangle ACD_1$ – равнобедренный, AD_1 – основание. $AD_1 = AD + DD_1 = AD + BC = 2MN = 2\sqrt{6}$. $CH = BR = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора из $\triangle CHA$:

$$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{CH^2 + \left(\frac{AD_1}{2}\right)^2} = \sqrt{3 + 6} = 3$$

Ответ: $AC = 3$.

Задача 5

В треугольнике ABC угол BAC равен 60° , угол ABC равен 45° . Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M, N, P .

а) Докажите, что треугольник MNP прямоугольный.

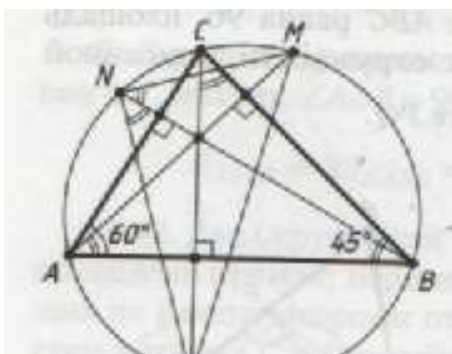
б) Найдите площадь треугольника MNP , если $BC = 12$.

Повторить. Свойство вписанных углов; теорему синусов.

Решение.

а) Пусть продолжения высот треугольника ABC , проведенных из вершин A, B и C , пересекают описанную около него окружность в точках M, N и P соответственно.

Тогда вписанные углы PNB и PCB опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle PNB = \angle PCB$

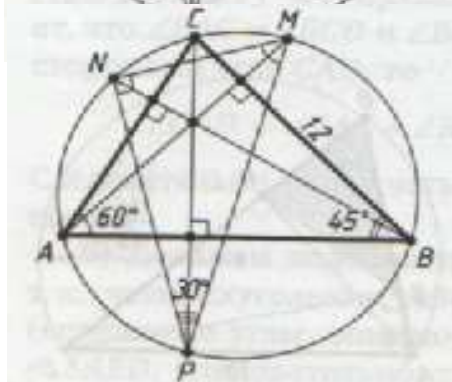


Аналогично, $\angle MNB = \angle MAB$

Значит,

$$\angle PMN = \angle PNB + \angle MNB = \angle PCB + \angle MAB = (90^\circ - \angle ABC) + (90^\circ - \angle ABC) = 90^\circ - 45^\circ + 90^\circ - 45^\circ = 90^\circ$$

Следовательно, треугольник MNP прямоугольный. Пункт а) доказан.



б) Угол MNA равен углу NBA , угол APM равен углу ACP (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу).

Тогда

$$\angle NMP = \angle NMA + \angle AMP = \angle NBA + \angle ACP = 90^\circ - 60^\circ + 90^\circ - 60^\circ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Следовательно, $\angle MPN = 30^\circ$.

Пусть R – радиус описанной окружности треугольника ABC . По теореме синусов

$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{12}{2 \sin 60^\circ} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Тогда } MN = 2R \sin \angle MPN = 2 \sin 30^\circ = R = 4\sqrt{3}$$

$$NP = 2R \sin \angle NMP = 2 \sin 60^\circ = R\sqrt{3} = 12$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2} MN \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 24\sqrt{3}$$

Ответ: $24\sqrt{3}$

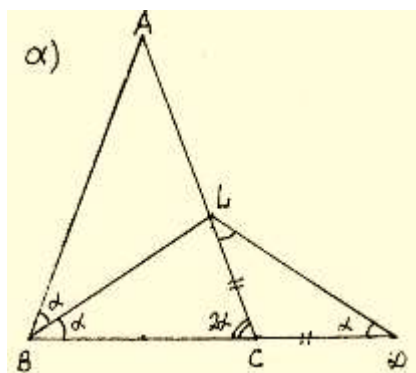
Практикум по решению задач

Задания № 16. ЕГЭ. (Математика. 50 вариантов типовых тестовых заданий; под ред. И.В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен»)

№1) На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos \angle ABC = 1/6$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?



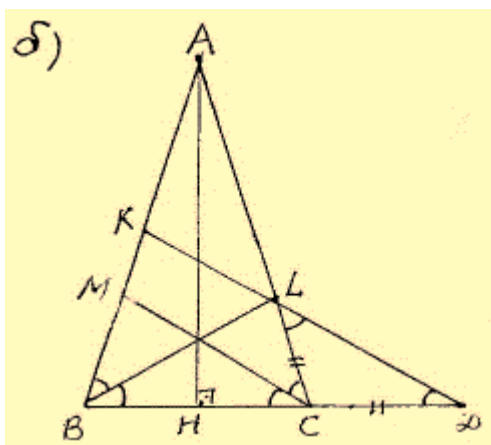
По условию: $\angle BDL = \angle LBD = \alpha$ и

$$\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha.$$

Так как $\angle LCB$ – внешний для $\triangle LCD$, то $2\alpha = \alpha$

$+ \angle CLD$, $\Rightarrow \angle CLD = \alpha = \angle LDC$, $\Rightarrow \triangle LCD$ – равнобедренный.

Доказано.



1). По условию: $\cos \angle B = \frac{1}{6}$,

Тогда $BH = a$, $AB = 6a$, $BC = 2a$.

2). BL – биссектриса, $\Rightarrow$

$LC : LA = BC : AB = 1 : 3$, $\Rightarrow$

$LC = \frac{1}{4}AC = 1.5a = CD$; $AL = \frac{3}{4}AC = 4.5a$.

3). MC – биссектриса равнобедренного $\triangle ABC$,
 $\Rightarrow BM = CL = 1.5a$ ($\triangle MBC = \triangle LCB$) и $MC \parallel KD$.

4). По теореме о пропорциональных отрезках:

$$\frac{BM}{MK} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{1.5a}{MK} = \frac{2a}{1.5a}; \Rightarrow MK = \frac{9}{8}a; \Rightarrow BK = \left(\frac{9}{8} + \frac{3}{2}\right)a = \frac{21}{8}a;$$

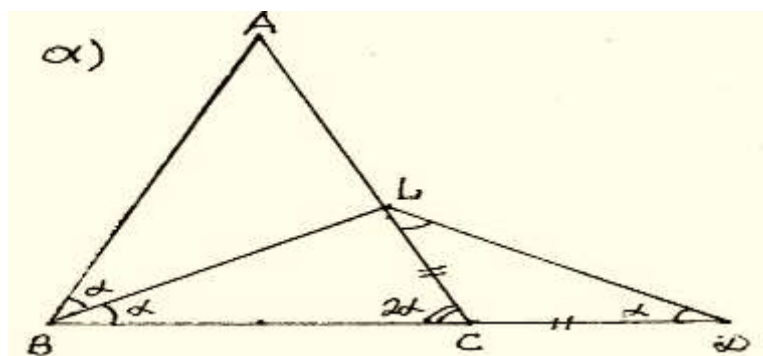
$$AK = \left(6 - \frac{21}{8}\right)a = \frac{27}{8}a; \Rightarrow \frac{AK}{KB} = \frac{27}{21} = \frac{9}{7}.$$

Ответ: $AK : KB = 9 : 7$.

№2. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причем точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 25$. Найдите сторону AD .



а). $\angle CBM = \angle BQA = \alpha$, (как

накрест лежащие при $BC \parallel AQ$),

$\angle MQR = \frac{1}{2} \widehat{MP}$ – вписанный;

$\angle MOP = \widehat{MP}$ – центральный; $\Rightarrow$

$\angle MOP = 2\alpha$. В $\triangle MOP$:

$\angle OMP = \angle OPM = 90^\circ - \alpha$.

Так как $OM \perp CD$, то $\angle DMP = 90^\circ - \angle OMP = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha = \angle CBM$.

Доказано.

б) 1. $CMOE$ – квадрат, т.к. $\angle C = \angle E = \angle M = 90^\circ$; $CM = EO = R$ и $CE = MO = R$.

По условию $AB = CD = 25$, $CM = R = 17$, $\Rightarrow MD = 8$.

2. Проведем радиус OQ . Так как $DMOH$ – прямоугольник, то $OH = MD = 8$.

$\Rightarrow PH^2 = OP^2 - OH^2 = 17^2 - 8^2 = 225$, $PH = 15$. $DH = MO = R = 17$.

$\Rightarrow DP = DH - PH = 17 - 15 = 2$.

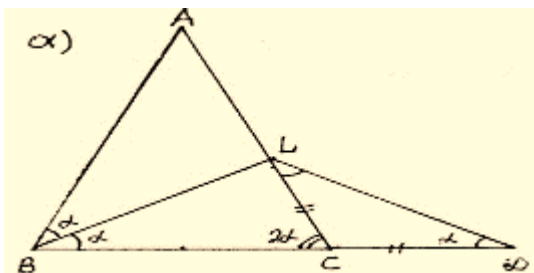
3. $\triangle BCM$ и $\triangle MDP$ подобны, ($\angle CBM = \angle DMP = \alpha$, $\angle C = \angle D = 90^\circ$), $\Rightarrow$
 $\frac{CM}{DP} = \frac{BC}{MD}; \Rightarrow BC = \frac{17 \times 8}{2} = 68. \Rightarrow AD = 68.$

Ответ: $AD = 68.$

№3. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.



По свойству описанного четырехугольника:

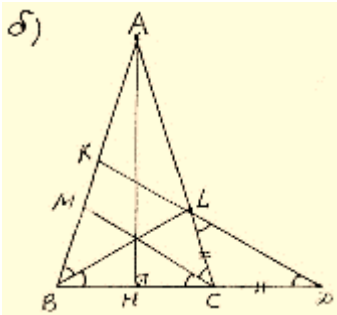
$$BM + AN = AB + MN, \quad MC + ND = CD + MN.$$

По условию: $BM = MC$, $AN = ND$. $\Rightarrow$

$$BM + AN = MC + ND, \Rightarrow AB + MN = CD + MN, \Rightarrow AB = CD.$$

Доказано.

б). Из п. а) следует, что трапеции $ABMN$ и $DCMN$ симметричны относительно MN , и $MN \perp AB$, $MN \perp BC$. Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCM$:



$BM = 5$, $R = 3$. Найти: $O_1H_1 = r = ?$

1). Проведем радиус $OL \perp AB$ и отрезок OB ;

По свойству касательных $BF = BL = 5 - 3 = 2$,

$$BO^2 = 3^2 + 2^2 = 13, \quad BO = \sqrt{13}.$$

BO и AO – биссектрисы, $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\Rightarrow$

$\triangle ABO$ – прямоугольный. $\triangle ALO = \triangle AHO$.

2). Треугольники AOB , ALO , AHO , OLB – подобны.

$$OL^2 = AL \times LB, \Rightarrow AL = \frac{9}{2} \text{ и } AH = \frac{9}{2}; \quad AO^2 = AL^2 + LO^2 = \frac{117}{4}; \quad AO = \frac{3\sqrt{13}}{2}.$$

Из подобия $\triangle AOH$ и $\triangle AO_1H_1 \Rightarrow AO : AO_1 = OH : O_1H_1 = 3 : r$, причем

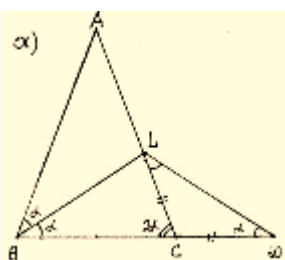
$$AO_1 = AO - 3 - r. \Rightarrow 3\sqrt{13}r = 9\sqrt{13} - 18 - 6r, \Rightarrow r = \frac{17 - 4\sqrt{13}}{3}.$$

Ответ: $r = \frac{17 - 4\sqrt{13}}{3}.$

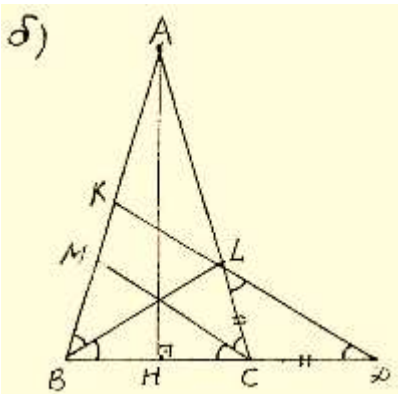
№ 4) Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трех окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.



а). Так как точка касания окружностей лежит на линии центров, получим три уравнения: $O_1O_2 = O_1C - O_2C = R_1 - R_2$; $O_1O_3 = O_1B - O_3B = R_1 - R_3$; $O_2O_3 = O_2E + O_3E = R_2 + R_3$; Сложим левые и правые части этих уравнений и получим: $O_1O_2 + O_1O_3 + O_2O_3 = 2R_1$. Доказано.



б). По условию: $R_1 = O_1C = O_1B = 4$; $R_2 = O_2E = O_2C = 1$.

1. Проведем $O_3H \perp O_1O_2$; $O_3H = O_3B = O_3E = R_3 = x$.

$O_1O_2 = R_1 - R_2 = 3$; $O_1O_3 = R_1 - R_3 = 4 - x$;

$O_2O_3 = R_2 + R_3 = x + 1$; $O_2H = O_1O_2 - O_1H = 3 - O_1H$.

2. В $\triangle O_1O_3H$: $(O_1H)^2 = (O_1O_3)^2 - (O_3H)^2 = (4 - x)^2 - x^2 = 16 - 8x$, $\Rightarrow O_1H = 2\sqrt{4 - 2x}$; $x < 2$, $\Rightarrow O_1O_3 < O_1O_2$.

3. В $\triangle O_2O_3H$: $(O_2O_3)^2 = (O_2H)^2 + (O_3H)^2$. Получим:

$(3 - 2\sqrt{4 - 2x})^2 + x^2 = (x + 1)^2 \Rightarrow$

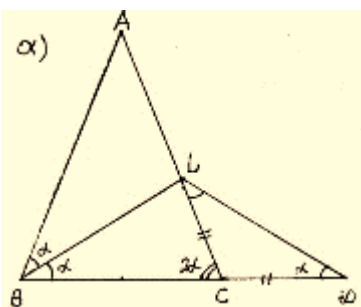
$$12\sqrt{4 - 2x} = 24 - 10x; \Rightarrow 25x^2 - 48x = 0, x = \frac{48}{25} = 1,92.$$

Ответ: $R_3 = 1,92$.

№ 5) В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 3 и 2. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.



а) $ABCD$ – параллелограмм, $\Rightarrow AB = CD$, $BC = AD$.

$ABCD$ – описанный четырехугольник, $\Rightarrow$

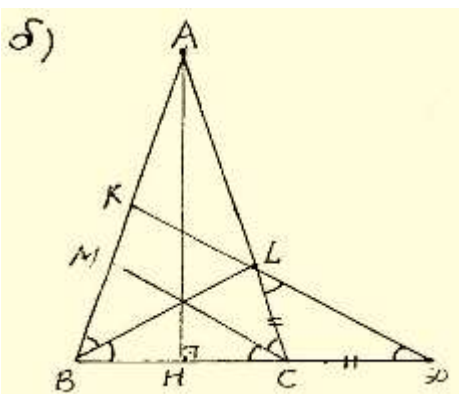
$AB + CD = BC + AD$, $\Rightarrow$

$2AB = 2CD = 2BC = 2AD$, $\Rightarrow$

$AB = CD = BC = AD$, $\Rightarrow$

$ABCD$ – ромб.

Доказано.



б) 1. M, N, P, K – точки касания, $\Rightarrow ON \perp BC$,

$OK \perp AD$; $OM \perp AB$, $OP \perp CD$. $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $\Rightarrow NK$

и MP – диаметры, $\Rightarrow \angle MNP = \angle NPK = \angle PKM =$

$\angle KMN = 90^\circ$ и $S_{MNPK} = MK \cdot KP$.

2. Проведем $BH \perp CD$. $BM = BN = HK = 2$,

$AM = AK = 3$, $\Rightarrow AH = 1$, $AB = 5$, $\cos \angle BAH = 1/5$,

$\cos \angle KDP = -1/5$, так как $\angle A + \angle D = 180^\circ$.

Найдем MK по теореме косинусов в $\triangle AMK$:

$MK^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1/5 = 15,6$;

аналогично в $\triangle DPK$: $PK^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1/5) = 9,6; \Rightarrow$

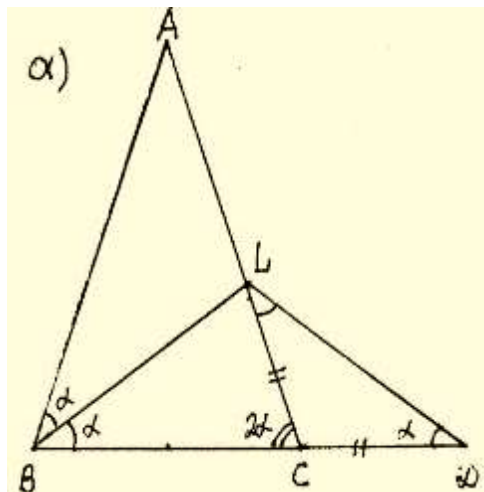
$$S_{MNPk} = MK \cdot KP = \sqrt{15,6} \cdot \sqrt{9,6} = \sqrt{149,76} = 4,8\sqrt{6}.$$

Ответ: $4,8\sqrt{6}$.

№ 6) На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M – середина гипотенузы AB , H – точка пересечения прямых CM и DK .

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH , если известно, что катеты треугольника ABC равны 130 и 312.



а). $\triangle ACB = \triangle DCK$ – по двум катетам (так как $ACDE$ и $BFKC$ – квадраты, то $AC = CD$ и $BC = CK$).
 $\Rightarrow \angle BAC = \angle KDC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, и $\alpha + \beta = 90^\circ$
 CM – медиана прямоугольного треугольника $\Rightarrow$
 $CM = AM = MB \Rightarrow \angle MBC = \angle MCB = \beta$.
 $\angle MCB = \angle HCD = \beta$ – вертикальные углы. $\Rightarrow$
 В $\triangle DCH$ $\angle CHD = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$, $\Rightarrow$
 $CM \perp DK$.

Доказано.

б) $MH = CM + CH$. Медиана CM равна половине гипотенузы AB .

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 130^2 + 312^2 = 114244, AB = 338, CM = 169.$$

CH – высота прямоугольного треугольника $DCK \Rightarrow$

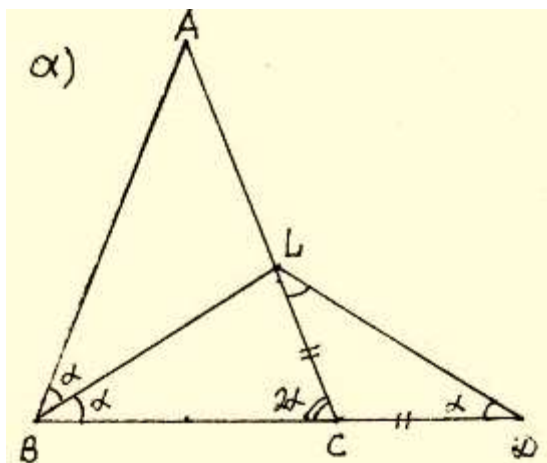
$$CH = CD \cdot CK : DK = 130 \cdot 312 : 338 = 120. MH = CM + CH = 169 + 120 = 289.$$

Ответ: $MH = 289$.

№ 7) Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC , причем $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O .

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC .

б) Найдите отношение площади четырехугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC , если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$.



а) По теореме Чебы имеем:

$$(CB_1 : B_1A) \cdot (AC_1 : C_1B) \cdot (BA_1 : A_1C) = 1.$$

По условию $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = m:n$,

$$\text{Поэтому } (CB_1 : B_1A) \cdot (AC_1 : C_1B) = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1 =$$

$$> BA_1 : A_1C = 1, \Rightarrow BA_1 = A_1C.$$

Доказано.

$$\text{б) } S_{AB_1OC_1} = S_{ACC_1} - S_{B_1OC};$$

1. Так как $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$, то и

$$S_{ABB_1} : S_{B_1BC} = S_{ACC_1} : S_{C_1CB} = 1 : 4.$$

Если $S_{ABC} = S$, то $S_{ABB_1} = S_{ACC_1} = \frac{1}{5}S$, а $S_{B_1BC} = S_{C_1CB} = \frac{4}{5}S$.

2. Так как $AB_1 : AC = AC_1 : AB = \frac{1}{5}$, то $B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow \Delta B_1AC_1$ и ΔCAB подобны, а также подобны ΔBOC и ΔB_1OC_1 (по двум равным углам). $\Rightarrow$

$$B_1O : BO = B_1C_1 : CB = \frac{1}{5}, \text{ и } S_{B_1OC} = \frac{1}{6} S_{B_1BC} = \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5}\right) S = \frac{2}{15} S. \Rightarrow$$

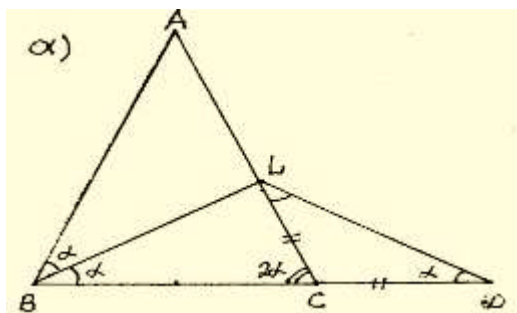
$$S_{AB_1OC_1} = S_{ACC_1} - S_{B_1OC} = \frac{1}{5}S - \frac{2}{15}S = \frac{1}{15}S, \Rightarrow S_{AB_1OC_1} : S_{ABC} = 1 : 15.$$

Ответ: $S_{AB_1OC_1} : S_{ABC} = 1 : 15$.

№ 8) Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 – середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.



а) Медиана делит треугольник на два равновеликих $\Rightarrow$

$$S_{AA_2C_1} = S_{MA_2C_1} = S_1; S_{AA_2B_1} = S_{MA_2B_1} = S_2;$$

$$S_{BB_2C_1} = S_{MB_2C_1} = S_3; S_{BB_2A_1} = S_{MB_2A_1} = S_4;$$

$$S_{CC_2A_1} = S_{MC_2A_1} = S_5; S_{CC_2B_1} = S_{MC_2B_1} = S_6;$$

$$\text{Тогда } S_{A_1B_2C_1A_2B_1C_2} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6.$$

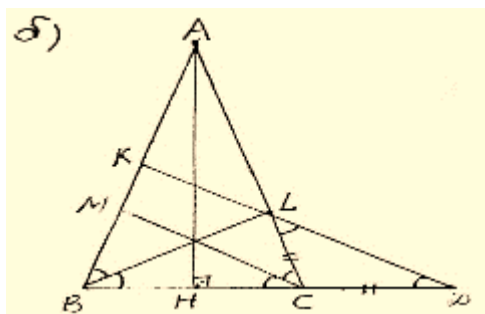
$$S_{ABC} = 2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6). \Rightarrow$$

$$S_{A_1B_2C_1A_2B_1C_2} = \frac{1}{2} S_{ABC}. \quad \text{Доказано.}$$

б) 1. Заметим, что $A_1B_2 = A_2B_1 = \frac{1}{2} MC = c$, как средние линии ΔBCM и ΔACM .

Аналогично: $B_1C_2 = B_2C_1 = \frac{1}{2} MA = a$ и $C_1A_2 = C_2A_1 = \frac{1}{2} MB = b$, причем по свойству

медиан: $c = \frac{1}{3} CC_1$, $a = \frac{1}{3} AA_1$, $b = \frac{1}{3} BB_1$.



2. Продлим медиану AA_1 на её длину, получим параллелограмм $ABDC$ с диагоналями AD и BC .

Применив теорему косинусов для ΔABC и ΔABD , получим, что $AD^2 + BC^2 = AB^2 + BD^2 + DC^2 + AC^2, \Rightarrow$

$$AD^2 = 4(AA_1)^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2, \Rightarrow$$

$$(AA_1)^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2).$$

Аналогично получим:

$$(BB_1)^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2) \text{ и } (CC_1)^2 = \frac{1}{4}(2BC^2 + 2AC^2 - AB^2), \Rightarrow$$

$$(AA_1)^2 + (AA_1)^2 + (CC_1)^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2). \Rightarrow \text{Сумма квадратов сторон}$$

шестиугольника равна: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = \frac{2}{9}((AA_1)^2 + (AA_1)^2 + (CC_1)^2) =$

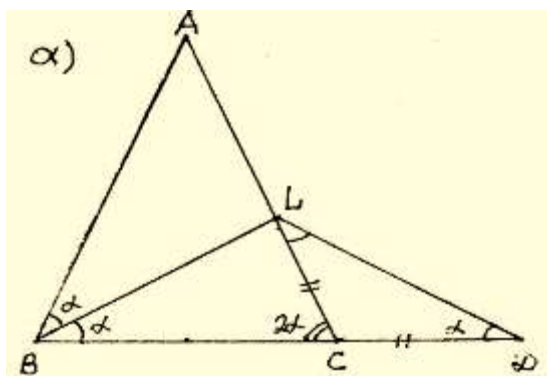
$$\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + AC^2) = \frac{1}{6}(16 + 49 + 64) = \frac{129}{6} = 21,5.$$

Ответ: 21,5.

№ 9) Две окружности пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через точку P , второй раз пересекает первую окружность в точке A , а вторую – в точке D . Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD , второй раз пересекает первую окружность в точке B , а вторую – в точке C .

а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.



а) Обозначим $\angle PQB = \alpha$, $\angle PQC = \beta$, причем $\alpha + \beta = 180^\circ$ (смежные).

Так как четырехугольники $APQB$ и $PDCQ$ – вписанные, то $\angle PQB + \angle PAB = 180^\circ$ и $\angle PQC + \angle PDB = 180^\circ$, $\Rightarrow$

$\angle PAB = \beta$, а $\angle PDC = \alpha \Rightarrow$

$\angle PAB + \angle PDC = \alpha + \beta = 180^\circ$, а это

односторонние углы $\Rightarrow AB \parallel DC$, а по

условию $AD \parallel BC$, $\Rightarrow ABCD$ – параллелограмм.

Доказано.

б) $\triangle PQB$ и $\triangle PDC$ – вписанные и по теореме синусов:

$PB : \sin \angle PQB = 2R_1$, $PC : \sin \angle PQC = 2R_2$, где R_1 и R_2 соответственно радиусы первой и второй окружностей. $\Rightarrow PB = 2R_1 \sin \angle PQB$ и $PC = 2R_2 \sin \angle PQC$.

Так как $\angle PQB + \angle PQC = 180^\circ$, то $\sin \angle PQB = \sin \angle PQC = \sin \alpha$.

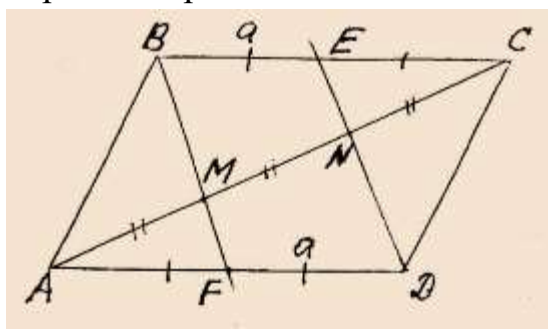
По условию $R_1 = 2R_2$, $\Rightarrow BP : PC = 4R_2 \sin \alpha : 2R_2 \sin \alpha = 2$.

Ответ: $BP : PC = 2$.

№ 10) Противоположные стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ параллельны. Через вершины B и D проведены параллельные прямые, пересекающие диагональ AC в точках M и N соответственно. Оказалось, что $AM = MC = NC$.

а) Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

б) Найдите отношение площади четырехугольника $BMDN$ к площади параллелограмма $ABCD$.



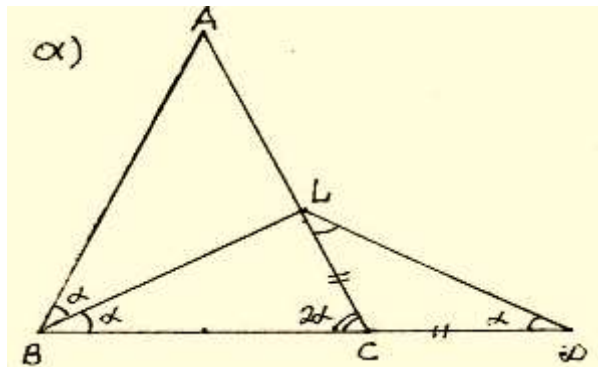
а) 1. По условию $AD \parallel BC$ и $BF \parallel ED \Rightarrow FBED$ – параллелограмм и $BE = FD = a$.

2. По теореме Фалеса:

т.к. $AM = MN$ и $BF \parallel ED$, $\Rightarrow AF = FD = a$, тогда $AD = 2a$.

т.к. $MN = CN$ и $BF \parallel ED$, $\Rightarrow BE = EC = a$, тогда $BC = 2a \Rightarrow AD = BC$, $AD \parallel BC$, $\Rightarrow ABCD$ – параллелограмм.

Доказано.



б) Так как медиана делит треугольник на два равновеликих, получим:

1. $S_{AMD} = S_{MND} = S$; $S_{MND} = S_{CND} = S$, $\Rightarrow S_{ACD} = 3S$, атак как AC – диагональ параллелограмма, то $S_{ABCD} = 6S$.

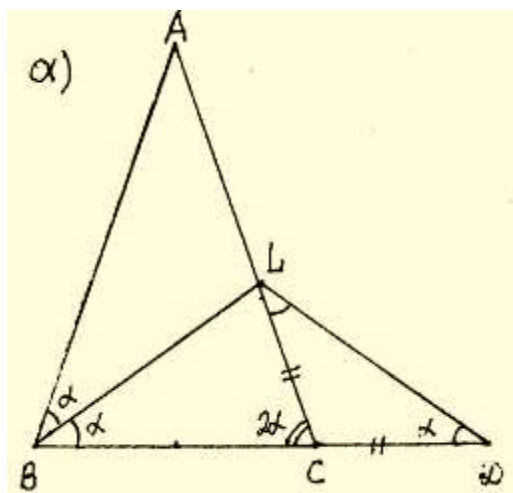
2. $S_{ABM} = S_{CDN} = S$, ($\triangle ABM = \triangle CDN$ по I признаку). $\Rightarrow S_{BMN} = S_{BMA} = S$, $\Rightarrow S_{BMDN} = 2S$, $\Rightarrow S_{BMDN} : S_{ABCD} = 2S : 6S = 1 : 3$.

Ответ: 1 : 3.

№ 11) На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M – середина стороны AB .

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 6$, $BC = 10$ и $\angle ACB = 30^\circ$.



а) Проведем $HB \parallel AC$, $HB = AC$; $KP \parallel CD$, $KP = CD$; получим параллелограммы $ACBH$ и $CDPK$, в которых $AC = CH$ и $KC = BC$ (из условия).

$\angle ACD + \angle BCK = 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

$\angle ACB + \angle DCK = 180^\circ$.

$\angle CBH + \angle ACB = 180^\circ$, как односторонние углы.

$\Rightarrow \angle CBH = \angle DCK$. Аналогично $\angle ACB = \angle CKP$.

$\Rightarrow$ Параллелограммы $ACBH$ и $CDPK$ равны, так как равны все соответственные стороны и углы.

$\Rightarrow CH = DK$, а так как точка M – середина стороны AB , то $CM = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2}DK$.

Доказано.

б) Для нахождения MO и MO_1 применим метод координат.

Начало координат – точка $A(0;0)$, ось Ox – вдоль AC , ось $Oy \perp AC$.

Найдем координаты нужных точек из условия ($AC = 6$, $BC = 10$, $\angle ACB = 30^\circ$,

O_1 – середина CE , O – середина BK , M – середина AB):

$C(6; 0)$, $E(0; -6)$, $O_1(3; -3)$, $B(6-5\sqrt{3}; 5)$, $K(11; 5\sqrt{3})$, $O(\frac{17-5\sqrt{3}}{2}; \frac{5+5\sqrt{3}}{2})$, $M(\frac{6-5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2})$.

$MO^2 = (\frac{11}{2})^2 + (\frac{5\sqrt{3}}{2})^2 = 49$, $\Rightarrow MO = 7$.

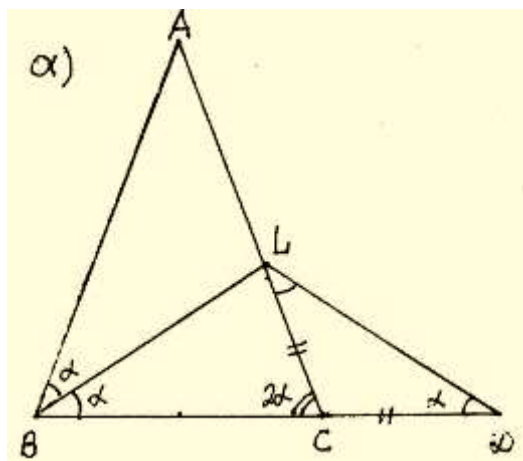
$$MO_1^2 = \left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2 = 49, \Rightarrow MO_1 = 7.$$

Ответ: $MO = MO_1 = 7$.

№ 12) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Из вершины A опущены перпендикуляры AF , AH , AP и AQ на прямые DE , BE , CD и BC соответственно.

а) Докажите, что $\angle FAH = \angle PAQ$.

б) Найдите AH , если $AF = a$, $AP = b$ и $AQ = c$.



а) Докажем, что $\triangle FAH$ и $\triangle PAQ$ подобны.

1. Так как $\angle AFE = \angle AHE = 90^\circ$, то $AHEN$ – вписанный в окружность с диаметром AE , $\Rightarrow \angle AFH = \angle AEN$ как вписанные углы. Также $\angle AEN = \angle AEB = \angle ACB$ как вписанные углы. $\Rightarrow \angle AFH = \angle ACB$ (1).

2. $\angle AQC = \angle APC = 90^\circ$, и $AQCP$ – вписанный в окружность с диаметром AC , $\Rightarrow \angle ACQ = \angle APQ$, $\Rightarrow \angle AFH = \angle APQ$ (2).

3. Аналогично $\angle AHF = \angle AEF$.

Заметим, что $\angle AEF + \angle AED = 180^\circ$ (смежные) и

$\angle AED + \angle ACD = 180^\circ$ ($ACDE$ вписанный), $\Rightarrow$

$\angle AEF = \angle ACD = \angle ACP$; $\angle ACD = \angle AQP$, т.к. $AQCP$ – вписанный. $\Rightarrow$

$\angle AHF = \angle AQP$ (3). Из (2) и (3) следует, что $\triangle FAH$ и $\triangle PAQ$ подобны. $\Rightarrow \angle FAH = \angle PAQ$.

Доказано.

б) Так как $\triangle FAH$ и $\triangle PAQ$ подобны, то $AH : AQ = AF : AP$, $\Rightarrow AH = \frac{AQ \cdot AF}{AP} = \frac{a \cdot c}{b}$.

Ответ: $AH = \frac{a \cdot c}{b}$.

Задачи с ответом

Сайт. Решу ЕГЭ. <https://ege.sdamgia.ru/>

Задание № 511418

Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 20$ и $CE = 12$.

Ответ: $\frac{113}{2}$.

Задание № [505425](#)

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC , если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Задание № [514536](#)

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение EH и AC , если $\angle ABC = 45^\circ$.

Ответ: $1 : 2$.

Задание № [517751](#)

Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 6MB$ и $2DN = 3CN$.

а) Докажите, что $AD = 3BC$.

б) Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{105}$.

Ответ: б) 18.

Задание № [517751](#)

Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 6MB$ и $2DN = 3CN$.

а) Докажите, что $AD = 3BC$.

б) Найдите длину отрезка MN , если радиус окружности равен $\sqrt{105}$.

Ответ: б) 18.

Задание № [507237](#)

Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

- а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.
- б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

Ответ: $\frac{48}{25}$.

Задание № [509024](#)

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны AC = 15, BC = 8. Окружность радиуса 2,5 с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

- а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{4}$ длины катета AC.
- б) Найдите радиус второй окружности.

Ответ: 2,5.

Задание № [511589](#)

Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что BK = OK.

- а) Докажите, что четырехугольник ABKC вписанный.
- б) Найдите длину отрезка AO, если известно, что радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны 5 и 15 соответственно, а OK = 8.

Ответ: 18,75.

Задание № [514719](#)

Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

$$r = \frac{17 - \sqrt{208}}{3}.$$

Ответ:

Задание № [511403](#)

Дан четырёхугольник $ABCD$.

а) Докажите, что отрезки LN и KM , соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $LM = \sqrt{3}$, $KM = 2\sqrt{3}$, $\angle KML = 60^\circ$.

Ответ: $6\sqrt{3}$.

Задание № [505249](#)

В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD . В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на стороне BC , а вершина E — на стороне AB .

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 2$.

Ответ: $6 - 3\sqrt{3}$.

Задание № [515828](#)

Медианы AA_1 , BB_1 , и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

Ответ: $\frac{63}{2}$.

Задание № [517533](#)

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причем меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M , отличной от A . Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P .

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K . Найдите отношение $QK:KA$.

Ответ: б) $\frac{2}{3}$.

Задания для самостоятельного решения

Задание № [503149](#)

Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Задание № [514717](#)

На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{1}{6}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?

Задание № [509823](#)

Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K .

а) Докажите, что отрезок BK вдвое больше отрезка CK .

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N . Найдите AB , если $BK = 18$ и $BN = 17$.

Задание № [507357](#)

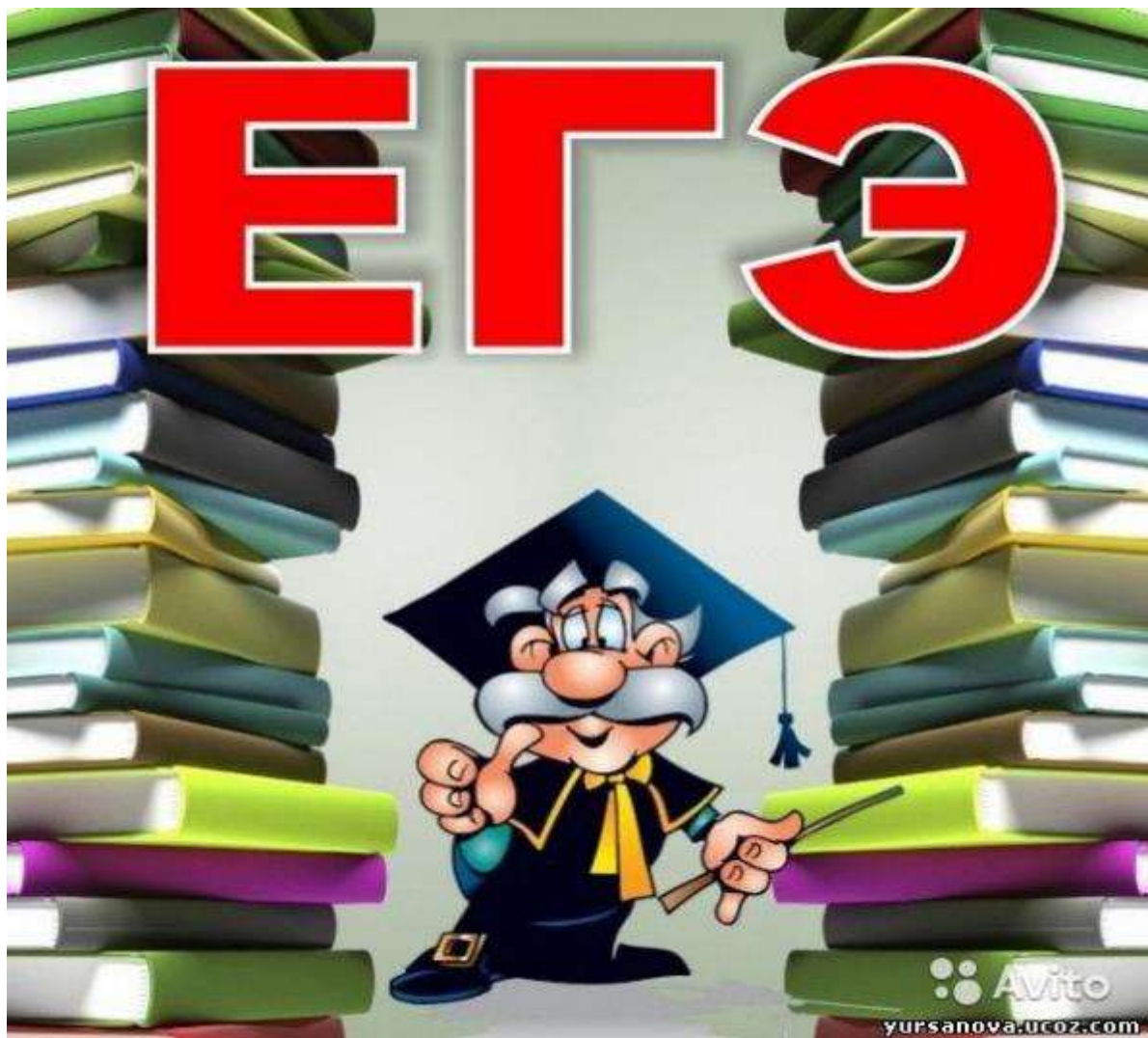
Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E . Окружность, описанная около треугольника ADE , пересекает прямую AC в точке F , отличной от A . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $AC = 8$, $AF = 3$, угол BAC равен 45° .

Задание № [511403](#)

Дан четырёхугольник $ABCD$.

а) Докажите, что отрезки LN и KM , соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $LM = \sqrt{3}$, $KM = 2\sqrt{3}$, $\angle KML = 60^\circ$.



Управление образования
ул. Коммунистическая, г.Абдулино, Оренбургской обл.,
461744 тел.(35355)2-60-11, факс(35355)2-60-11,
e-mail: 56ou012@obraz-orenburg.ru