Неравенства с модулем

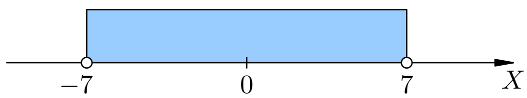
Содержание

Данная статья продолжает предыдущую статью «Уравнения с модулем». Мы рассматриваем в целом аналогичные ситуации, только вместо знака равенства будет стоять знак неравенства.

1 Геометрический смысл модуля

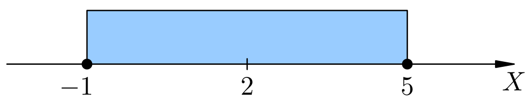
Понятие модуля обладает простым геометрическим смыслом: именно, $|x|$ есть расстояние от точки x до нуля. Более общим образом, *$|x - a|$ есть расстояние от точки x до точки a.* Давайте рассмотрим несколько элементарных примеров.

1. Решениями неравенства $|x| < 7$ служат все те x, которые удалены от нуля на расстояние, меньшее 7. Они расположены на интервале $(-7; 7)$.



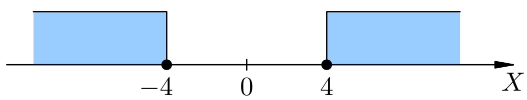
Множество решений неравенства $|x| < 7$

2. Решения неравенства $|x - 2| \leqslant 3$ суть все те x, которые удалены от точки 2 на расстояние, не превосходящее 3; они заполняют отрезок $[-1; 5]$.



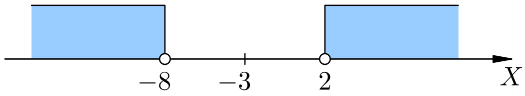
Множество решений неравенства $|x - 2| \leqslant 3$

3. Решениями неравенства $|x| \geqslant 4$ являются все x, удалённые от нуля на расстояние, не меньшее 4. Это объединение двух непересекающихся лучей: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.



Множество решений неравенства $|x| \geqslant 4$

4. Решениями неравенства $|x + 3| > 5$ являются все те x, которые удалены от точки -3 на расстояние, большее 5. Это объединение двух непересекающихся лучей с выколотыми началами: $(-\infty; -8) \cup (2; +\infty)$.



Множество решений неравенства $|x+3| > 5$

Задача 1. (*МГУ, геологич. ф-т, 2001*) Решить неравенство

$$\frac{|x-3|+2}{|2x-3|-5} \leqslant 0.$$

Решение. Числитель дроби положителен при всех x, поэтому данное неравенство равносильно отрицательности знаменателя:

$$|2x-3|-5<0 \quad \Leftrightarrow \quad |2x-3|<5.$$

Дальше понятно: величина $2x$ удалена от точки 3 на расстояние, меньшее 5:

$$-2<2x<8,$$

откуда $-1<x<4$.

Ответ: $(-1;4)$.

2 Замена переменной

В некоторых неравенствах оказывается полезной замена $|x-a|=t$.

Задача 2. (*МГУ, физический ф-т, 2004*) Решить неравенство

$$\frac{|x-2|}{\frac{12}{|x-2|}-1} > 1.$$

Решение. Делаем замену $|x-2|=t$:

$$\frac{t}{\frac{12}{t}-1} > 1.$$

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{t^2}{12-t} > 1,$$

(поскольку запрещённое значение $t=0$ не является решением последнего), которое, в свою очередь, равносильно

$$\frac{t^2+t-12}{t-12}<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(t+4)(t-3)}{t-12}<0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t<-4, \\ 3<t<12, \end{array}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} |x-2|<-4, \\ 3<|x-2|<12. \end{array}\right.$$

Первое неравенство полученной совокупности не имеет решений. Решениями второго неравенства служат значения x, удалённые от точки $x=2$ на расстояние больше 3, но меньше 12, то есть $-10<x<-1$ и $5<x<14$.

Ответ: $(-10;-1)\cup(5;14)$.

Задача 3. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2003*) Решить неравенство

$$\frac{3|y|}{4}-y^2\leqslant 0.$$

Решение. Делаем замену $|y|=t$:

$$\frac{3t}{4}-t^2\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad t\left(t-\frac{3}{4}\right)\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} &t\leqslant 0,\\ &t\geqslant\frac{3}{4}, \end{aligned}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{aligned} &|y|\leqslant 0,\\ &|y|\geqslant\frac{3}{4}, \end{aligned}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} &y=0,\\ &y\geqslant\frac{3}{4},\\ &y\leqslant-\frac{3}{4}. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]\cup\{0\}\cup\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$.

3 Перебор промежутков

В некоторых неравенствах модуль снимается «в лоб» — путём рассмотрения значений переменной на различных промежутках.

Задача 4. (*МГУ, экономич. ф-т, 1984*) Решить неравенство

$$2|x-4|+|3x+5|\geqslant 16.$$

Решение. Разбираем три случая расположения x относительно точек $-\frac{5}{3}$ и 4.

1) $x\geqslant 4$. Имеем:

$$2(x-4)+3x+5\geqslant 16,$$
$$x\geqslant\frac{19}{5}.$$

Полученное неравенство выполняется при всех рассматриваемых $x\geqslant 4$. Иными словами, все числа из промежутка $[4;+\infty)$ являются решениями нашего неравенства.

2) $-\frac{5}{3}\leqslant x\leqslant 4$. Имеем в данном случае:

$$2(4-x)+3x+5\geqslant 16,$$
$$x\geqslant 3.$$

Учитывая, в каком промежутке мы сейчас находимся, получаем в качестве решений исходного неравенства множество $[3;4]$.

3) $x\leqslant-\frac{5}{3}$. Имеем:

$$2(4-x)-3x-5\geqslant 16,$$
$$x\leqslant-\frac{13}{5}.$$

Так как $-\frac{13}{5} < -\frac{5}{3}$, то все значения x из полученного промежутка $\left(-\infty, -\frac{13}{5}\right]$ служат решениями исходного неравенства.

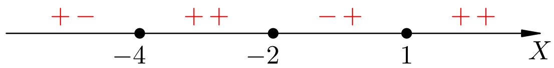
Остаётся объединить множества решений, полученные в трёх рассмотренных случаях.

Ответ: $\left(-\infty, -\frac{13}{5}\right] \cup [3; +\infty)$.

Задача 5. (*МГУ, биологич. ф-т, 1998*) Решить неравенство

$$|x^2 + x - 2| + |x + 4| \leqslant x^2 + 2x + 6.$$

Решение. Выражение $x^2 + x - 2$ положительно при $x < -2$, $x > 1$ и отрицательно при $-2 < x < 1$. Выражение $x+4$ положительно при $x > -4$ и отрицательно при $x < -4$. Расставим знаки наших выражений на числовой оси (первым идёт знак квадратного трёхчлена, вторым — знак линейной функции):



Теперь понятно, что нам нужно рассмотреть *три* случая.

1) $x \leqslant -4$. При снятии модулей квадратный трёчлен остаётся со знаком плюс, линейная функция — с минусом:

$$x^2 + x - 2 - x - 4 \leqslant x^2 + 2x + 6,$$
$$x \geqslant -6.$$

Таким образом, здесь имеем решения $-6 \leqslant x \leqslant -4$.

2) $-4 \leqslant x \leqslant -2$ или $x \geqslant 1$. При снятии модулей оба выражения остаются с плюсом:

$$x^2 + x - 2 + x + 4 \leqslant x^2 + 2x + 6,$$
$$2 \leqslant 6.$$

Получилось верное числовое равенство. Значит, рассматриваемые значения $-4 \leqslant x \leqslant -2$ и $x \geqslant 1$ являются решениями нашего неравенства.

3) $-2 \leqslant x \leqslant 1$. При снятии модулей квадратный трёхчлен остаётся с минусом, линейная функция — с плюсом:

$$-x^2 - x + 2 + x + 4 \leqslant x^2 + 2x + 6,$$
$$x^2 + x \geqslant 0.$$

Полученное неравенство имеет решения $x \leqslant -1$ или $x \geqslant 0$. В пересечении с рассматриваемым промежутком имеем множество решений исходного неравенства: $-2 \leqslant x \leqslant -1$ или $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Объединяя множества решений в трёх рассмотренных случаях, получаем ответ.

Ответ: $[-6; -1] \cup [0; +\infty)$.

4 Равносильные переходы

«Лобовое» снятие модуля (путём перебора промежутков) не всегда является самым эффективным средством. В некоторых неравенствах бывает проще переходить к равносильным системам или совокупностям условий.

Умножение на модуль

Как известно, неравенство можно умножить на положительную величину (с сохранением знака неравенства). В частности, имеет место эквивалентность

$$\frac{A}{|B|} < C \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A < |B|C, \\ B \neq 0 \end{cases}$$

(A, B, C — некоторые выражения, знак неравенства может быть любым). Такой переход может сократить вычислительную работу.

Задача 6. (*МГУ, ВМК, 1998*) Решить неравенство

$$3x < \frac{4x-2}{|x-3|}.$$

Решение. Непосредственное снятие модуля приводит к двум рациональным неравенствам, но лучше сразу умножить на $|x-3|$. Наше неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x|x-3| < 4x-2, \\ x \neq 3, \end{cases}$$

которая равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x > 3, \\ 3x(x-3) < 4x-2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 3, \\ 3x^2 - 13x + 2 < 0 \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} x < 3, \\ 3x(3-x) < 4x-2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < 3, \\ 3x^2 - 5x - 2 > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Решения системы (1) образуют множество $3 < x < \frac{13+\sqrt{145}}{6}$. Решения системы (2) суть два промежутка $x < -\frac{1}{3}$ и $2 < x < 3$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (2;3) \cup \left(3; \frac{3+\sqrt{145}}{6}\right)$.

Задача простая, и выигрыш от умножения на модуль здесь не так уж велик. Однако в следующей задаче равносильное умножение неравенства позволит очень существенно сэкономить на выкладках.

Задача 7. (*МГУ, мехмат, 2000*) Решить неравенство

$$\frac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|} < \frac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}. \tag{3}$$

Решение. Непосредственное снятие модулей означает перебор пяти промежутков, что не вызывает энтузиазма. Поэтому действуем иначе: при ограничении $x \neq -4$ умножаем обе части неравенства (3) на положительную величину $\frac{|x+4|}{|x-2|+|x+1|}$ и получаем равносильное неравенство

$$\frac{|(x-5)(x+4)|-(x+4)^2}{(x-2)^2-(x+1)^2} < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|x^2-x-20|-x^2-8x-16}{-6x+3} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|x^2-x-20|-x^2-2x-19}{2x-1} > 0. \tag{4}$$

Пусть $x \in E_1 = (-\infty; -4) \cup [5; +\infty)$. Тогда $x^2 - x - 20 \geqslant 0$, и неравенство (4) равносильно неравенству
$$\frac{-3x-39}{2x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+13}{2x-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -13 < x < \frac{1}{2},$$
что в пересечении с множеством E_1 даёт часть решений исходного неравенства (3):
$$\boxed{-13 < x < -4.} \tag{5}$$

Пусть теперь $x \in E_2 = (-4; 5)$. Тогда $x^2 - x - 20 < 0$, и неравенство (4) равносильно неравенству
$$\frac{-2x^2-x+1}{2x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(2x-1)}{2x-1} < 0,$$
решения которого суть $x < -1$. В пересечении с множеством E_2 получаем вторую часть решений исходного неравенства:
$$\boxed{-4 < x < -1.} \tag{6}$$

Множество решений неравенства (3) есть объединение «рамочек» (5) и (6).

Ответ: $(-13; -4) \cup (-4; -1)$.

Неравенства вида $|A| < B$

Пусть A и B — некоторые выражения с переменной. Оказывается, неравенство
$$|A| < B \tag{7}$$
равносильно системе
$$\begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases} \tag{8}$$

Действительно, если $B > 0$, то эквивалентность (7) $\Leftrightarrow$ (8) очевидна. В случае $B \leqslant 0$ неравенство (7) не имеет решений; но и система (8) также не имеет решений, поскольку выражение A не может быть одновременно меньше неположительной величины B и больше неотрицательной величины $-B$. Следовательно, и при $B \leqslant 0$ имеем (7) $\Leftrightarrow$ (8).

На экзамене или олимпиаде вам придётся привести эти рассуждения, доказывающие законность рассмотренного перехода
$$|A| < B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A < B, \\ A > -B. \end{cases} \tag{9}$$
Но оно того стоит! Это наглядно демонстрирует следующий пример.

Задача 8. Решить неравенство
$$|x^2 - 3x + 1| < x - 2.$$

Решение. Ради интереса попробуйте снять модуль как раньше, исследуя знак квадратного трёхчлена. Во-первых, вы сразу получите иррациональные корни. Затем, после снятия модуля и упрощений, вас поджидают другие иррациональные корни, которые придётся сравнивать с первыми. Однако значительную часть этих технических проблем удаётся обойти, используя переход (9).

А именно, наше неравенство равносильно системе
$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 < x - 2, \\ x^2 - 3x + 1 > 2 - x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0, \\ x^2 - 2x - 1 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 < x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1 + \sqrt{2}, \\ x < 1 - \sqrt{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Вот и всё. Теперь легко получаем ответ.

Ответ: $\left(1+\sqrt{2};3\right)$.

Переход (9) сохраняет свой вид при замене строгого равенства на нестрогое:

$$|A| \leqslant B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A \leqslant B, \\ A \geqslant -B. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство эквивалентности (10) совершенно аналогично тому, что приведено выше.

Неравенства вида $|A| > B$

Неравенство

$$|A| > B \tag{11}$$

равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} A > B, \\ A < -B. \end{array}\right. \tag{12}$$

В самом деле, если $B \geqslant 0$, то эквивалентность (11) $\Leftrightarrow$ (12) очевидна. Если же $B < 0$, то неравенство (11) выполнено при всех допустимых значениях x; но и решением совокупности (12) служат все те же допустимые x, поскольку одно из неравенств совокупности заведомо выполнено (при $A \geqslant 0$ выполнено $A > B$, а при $A < 0$ выполнено $A < -B$). Следовательно, и при $B < 0$ имеет место эквивалентность (11) $\Leftrightarrow$ (12).

Разумеется, эквивалентность сохраняется при замене строгого неравенства на нестрогое:

$$|A| \geqslant B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A \geqslant B, \\ A \leqslant -B. \end{array}\right. \tag{13}$$

Задача 9. (*МГУ, ВМК, 2000*) Решить неравенство

$$\big||x^2-8x+2|-x^2\big| \geqslant 2x+2.$$

Решение. Здесь используются оба эквивалентных перехода (13) и (10). Имеем:

$$\big||x^2-8x+2|-x^2\big| \geqslant 2x+2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} |x^2-8x+2|-x^2 \geqslant 2x+2, \\ |x^2-8x+2|-x^2 \leqslant -2x-2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} |x^2-8x+2| \geqslant x^2+2x+2, \\ |x^2-8x+2| \leqslant x^2-2x-2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2-8x+2 \geqslant x^2+2x+2, \\ x^2-8x+2 \leqslant -x^2-2x-2, \\ \begin{cases} x^2-8x+2 \leqslant x^2-2x-2, \\ x^2-8x+2 \geqslant -x^2+2x+2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ x^2-3x+2 \leqslant 0, \\ \begin{cases} x \geqslant \dfrac{2}{3}, \\ x^2-5x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x \geqslant 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;0] \cup [1;2] \cup [5;+\infty)$.

Неравенства вида $|A| < |B|$

Решая неравенство вида $|A| < |B|$ (знак неравенства тут может быть любым), удобно действовать следующим образом: коль скоро обе части неравенства неотрицательны, можно возвести неравенство в квадрат:

$$|A| < |B| \quad \Leftrightarrow \quad A^2 < B^2 \quad \Leftrightarrow \quad A^2 - B^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - B)(A + B) < 0.$$

Последнее неравенство решается, например, методом интервалов.

Задача 10. (*МГУ, экономич. ф-т, 2001*) Решить неравенство

$$\left|x^2 + 10x + 16\right| \geqslant \left|x^2 - 16\right|.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\left(x^2 + 10x + 16\right)^2 \geqslant \left(x^2 - 16\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (10x + 32)(2x^2 + 10x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{16}{5}\right) x(x + 5) \geqslant 0.$$

Дальнейшее элементарно.

Ответ: $\left[-5; -\frac{16}{5}\right] \cup [0; +\infty)$.

5 Задачи

Во всех задачах по умолчанию требуется решить неравенство.

Геометрический смысл модуля

1. а) $|x - 6| \leqslant 4$; б) $|2x + 3| > 11$.

а) $[2; 10]$; б) $(-\infty; -7) \cup (4; +\infty)$

2. (*МГУ, физический ф-т, 1996*) $-1 < |x^2 - 7| < 29$.

$(-6; 6)$

3. (*МГУ, ИСАА, 2007*) $|x + 3| \cdot (|x - 1| - 3) \leqslant 0$.

$\{-3\} \cup [-2; 4]$

4. (*МГУ, МШЭ, 2007*)

$$\left|\frac{x}{10} - \frac{1}{5}\right| \geqslant \left|\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right|.$$

2

Замена переменной

5. (*МГУ, географич. ф-т, 1997*)

$$\frac{|x - 1| + 10}{4|x - 1| + 3} > 2.$$

$\left(\frac{3}{7}; \frac{11}{7}\right)$

6. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1998*)

$$\frac{1}{|x+1|-1} \geqslant \frac{1}{|x+1|-2}\,.$$

$(-3;-2) \cup (0;1)$

7. (*МГУ, физический ф-т, 2004*)

$$\frac{|x-1|}{1-\frac{6}{|x-1|}} < -1.$$

$(-5;-1) \cup (3;7)$

8. (*МГУ, ФНМ, 2004*)

$$|3x+1|+2+\frac{3}{|3x+1|-2} \leqslant \frac{1}{|3x+1|+2}\,.$$

$\left(-1;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\} \cup \left[\frac{\sqrt{3}-2}{3};\frac{1}{3}\right)$

9. (*МГУ, географич. ф-т, 1987*) $x^2+2|x|<8.$

$(-2;2)$

10. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2003*)

$$\frac{3x^2}{2}-|x| \geqslant 0.$$

$\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{2}{3};+\infty\right)$

11. а) $x^2+2x-|x+1|>5$; б) $x^2-4x+8-5|x-2| \leqslant 0.$

а) $(-\infty;-4) \cup (2;+\infty)$; б) $[-2;1] \cup [3;6]$

Перебор промежутков

12. (*МГУ, геологич. ф-т, 2005*) $(|x|-1)\,(2x^2+x-1) \leqslant 0.$

$\{-1\} \cup \left[\frac{1}{2};1\right]$

13. (*МГУ, геологич. ф-т, 2006*)

$$\frac{x^2-9}{|x|-3}\cdot(x+4) \geqslant 0.$$

$[-4;-3) \cup (-3;3) \cup (3;+\infty)$

14. (*МГУ, ИСАА, 1998*)

$$\frac{3|x|-11}{x-3} > \frac{3x+14}{6-x}\,.$$

$(-2;2) \cup (2;3) \cup (6;+\infty)$

15. (*МГУ, геологич. ф-т, 2002*)

$$\frac{x|x|+1}{x-2}+1 \geqslant x.$$

$\boxed{\left(-\infty; \tfrac{1}{3}\right] \cup (2; +\infty)}$

16. (*МГУ, геологич. ф-т, 2004*)

$$\frac{x-2}{|x-2|} \leqslant 4-x^2.$$

$\boxed{\left[-\sqrt{5}; 2\right)}$

17. (*МГУ, химический ф-т, 2007*)

$$\frac{x^2+4x+4}{2x+12} \leqslant 1-\frac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}\,.$$

$\boxed{(-\infty; -6) \cup \left[-2\sqrt{5}; -4\right) \cup \{-2\}}$

18. (*МГУ, ФНМ, 2003*)

$$\frac{4x}{|x-2|-1} \geqslant 3.$$

$\boxed{\left[\tfrac{3}{7}; 1\right) \cup (3; +\infty)}$

19. (*МГУ, геологич. ф-т, 2003*)

$$\frac{x-2}{|x+2|}+\frac{2x+5}{x+2} \leqslant 0.$$

$\boxed{[-7; -2) \cup (-2; -1]}$

20. (*МГУ, мехмат, 1985*)

$$\frac{1}{x-1}+\frac{3}{|x|+1} \geqslant \frac{1}{|x|-1}\,.$$

$\boxed{(-\infty; -3] \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)}$

21. (*МГУ, мехмат, 2004-07.2*)

$$\frac{\left(x^2+x+1\right)^2-2\left|x^3+x^2+x\right|-3x^2}{10x^2-17x-6} \geqslant 0.$$

$\boxed{\left(-\infty; -2-\sqrt{3}\right] \cup \left(-\tfrac{3}{10}; -2+\sqrt{3}\right] \cup \{1\} \cup (2; +\infty)}$

22. (*МГУ, социологич. ф-т, 1999*)

$$\frac{2|2-x|}{2-|x|} \leqslant |x-2|.$$

$\boxed{(-\infty; -2) \cup \{0\} \cup (2; +\infty)}$

23. (*МГУ, экономич. ф-т, 1984*) $3|x-2|+|5x-4| \leqslant 10.$

$\boxed{[0;\, \frac{5}{2}]}$

24. (*МГУ, ф-т гос. управления, 2003*) $|2x+8| \geqslant 8-|1-x|.$

$\boxed{(-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)}$

25. (*МГУ, ВМК, 2003*) $3|x+2|-4|x+1| \geqslant 2.$

$\boxed{[-\frac{8}{7}; 0]}$

26. (*МГУ, филологич. ф-т, 1991*)

$$\frac{|x+1|+|x-2|}{x+199} < 1.$$

$\boxed{(-\infty; -199) \cup (-66; 200)}$

27. (*МГУ, геологич. ф-т, 1985*)

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1} \geqslant 1.$$

$\boxed{(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)}$

28. (*МГУ, ИСАА, 1992*)

$$\frac{|x+3|-1}{4-2|x+4|} \geqslant -1.$$

$\boxed{(-\infty; -8] \cup (-6; -2) \cup (-2; +\infty)}$

29. (*МГУ, ф-т психологии, 1979*)

$$\frac{3}{|x+3|-1} \geqslant |x+2|.$$

$\boxed{\left[-5; -4\right) \cup \left(-2; -2+\sqrt{3}\right]}$

30. (*МГУ, химический ф-т, 2000*) $\big|x+|1-x|\big| > 3.$

$\boxed{(2; +\infty)}$

31. (*МГУ, геологич. ф-т, 1998*)

$$\left|\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| - 3x + 3\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3x^2}{2} - \left|\frac{x^2}{2}+x-\sqrt{2}\right|.$$

$\boxed{\left(-\infty; -1-\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3}+1}\right) \cup \left(-1+\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3}+1}; +\infty\right)}$

32. (*«Физтех», 2011*)

$$\frac{20-4|x|}{|x^2+11x+21|-3} \leqslant 1.$$

$\boxed{(-\infty;-9)\cup(-8;-4]\cup(-3;-2)\cup\left[\frac{\sqrt{233}-15}{2};+\infty\right)}$

Равносильные переходы

33. (*«Физтех», 2017, 9*) $x^2-2x+1-|x^3-1|-2\left(x^2+x+1\right)^2 \geqslant 0.$

$\boxed{\left[-1;-\frac{1}{2}\right]}$

34. (*МГУ, мехмат, 2000-03.1*)

$$\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} < \frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}\,.$$

$\boxed{(3;4)\cup(4;7)}$

35. (*МГУ, геологич. ф-т, 1998*) $(x^2+5x-6)\cdot|x+4|^{-1}<0.$

$\boxed{(-6;-4)\cup(-4;1)}$

36. (*МГУ, филологич. ф-т, 2006*)

$$\frac{5-4x}{|x-2|} \leqslant |2-x|.$$

$\boxed{(-\infty;-1]\cup[1;2)\cup(2;+\infty)}$

37. (*МГУ, ВШБ, 2004*)

$$\frac{x+1}{|x-1|} \geqslant 1.$$

$\boxed{[0;1)\cup(1;+\infty)}$

38. (*МГУ, географич. ф-т, 2003*)

$$\frac{6}{|x|} \geqslant 7+x.$$

$\boxed{(-\infty;-6]\cup[-1;0)\cup\left(0;\frac{\sqrt{73}-7}{2}\right]}$

39. (*МГУ, ВМК, 1998*)

$$2x > \frac{5x+3}{|x+2|}\,.$$

$\boxed{\left(-\frac{9+\sqrt{57}}{4};-2\right)\cup(-2;-1)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)}$

40. (*МГУ, биологич. ф-т, 1999*)

$$\frac{3}{|x-1|} \geqslant 2x+5\,.$$

$\boxed{(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{\sqrt{73}-3}{4}\right]}$

41. (*МГУ, социологич. ф-т, 2001*)

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{|x|}\geqslant 2.$$

$\boxed{(-1;0)\cup\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$

42. (*МГУ, геологич. ф-т, 2002*)

$$\frac{x+1}{|2-x|}+\frac{x+1}{x-5}\leqslant 0.$$

$\boxed{(-\infty;-1]\cup\left[\frac{7}{2};5\right)}$

43. (*МГУ, геологич. ф-т, 2007*)

$$|x-12|\leqslant\frac{x}{12-x}\,.$$

$\boxed{[9;12)}$

44. (*«Физтех», 2017, 9*) $|x^3-2x^2+2|\geqslant 2-3x.$

$\boxed{\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right]\cup[0;+\infty)}$

45. (*МГУ, физический ф-т, 1998*) $|x^2+2x-7|<2x.$

$\boxed{\left(-2+\sqrt{11};\sqrt{7}\right)}$

46. (*МГУ, физический ф-т, 2003*) $|x^2+3x|+x^2-2\geqslant 0.$

$\boxed{\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)}$

47. $\big||x^3-x-1|-5\big|\geqslant x^3+x+8.$

$\boxed{\left(-\infty;-\sqrt[3]{6}\right]}$

48. (*МГУ, ВМК, 2000*) $\big||x^2+3x-8|-x^2\big|\geqslant 8-x.$

$\boxed{(-\infty;-4]\cup[-1;0]\cup[4;+\infty)}$

49. (*МГУ,ф-т глобальных процессов, 2006*)

$$\frac{|x^2+x-12|}{x-3}\geqslant 1.$$

$\boxed{(3;+\infty)}$

50. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2005*) $|x-1|\leqslant|x|.$

$\boxed{\left[\frac{1}{2};+\infty\right)}$

51. (*Моск. матем. регата, 2001, 8*) $|x+2000|<|x-2001|.$

$\boxed{\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)}$

52. (*МГУ, экономич. ф-т, 2001*) $|x^2 - 8x + 15| \leqslant |15 - x^2|$.

$\boxed{\left[0; \frac{15}{4}\right] \cup [4; +\infty)}$

53. (*МГУ, химический ф-т, 2001*)

$$\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{|x+1|}\,.$$

$\boxed{(0; 1) \cup (1; +\infty)}$

54. (*МГУ, биологич. ф-т, 1998*) $|x^2 + 3x| + |x + 5| \leqslant x^2 + 4x + 9$.

$\boxed{[-7; -2] \cup [-1; +\infty)}$

55. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2006*) $|x + 3| - |x^2 + x - 2| \geqslant 1$.

$\boxed{\{-2\} \cup [0; 2]}$

56. (*МГУ, мехмат, 2008*) $\big||1 - x^2| - |x^2 - 3x + 2|\big| \geqslant 3|x - 1|$.

$\boxed{(-\infty; -1] \cup \{1\} \cup [2; +\infty)}$

57. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11*)

$$\big||2 + x - x^2| - |x + 1|\big| \geqslant |x^2 - 2x - 3|.$$

$\boxed{\{-1\} \cup [2; +\infty)}$

58. (*МГУ, мехмат, 1999-05.3*) Найти все x, при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x-3|\,(|x-5| - |x-3|) - 6x \quad \text{и} \quad |x|\,(|x| - |x-8|) + 24$$

неположительно, а его модуль не меньше модуля другого.

$\boxed{[3; 5]}$