§7. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ (МОДУЛЯ)

Определение 1.

Абсолютной величиной числа a, или его модулем, называется само число, если оно неотрицательное, и ему противоположное, если число отрицательное, то есть

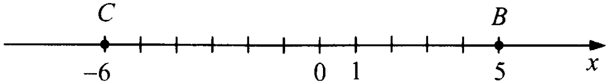
$|a| = a$, если $a \geq 0$,
$|a| = -a$, если $a < 0$.

Пример.
$|-7| = -(-7) = 7$; $|13| = 13$; $|0| = 0$.

Определение 2.

Модулем числа a называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки A (a).

Пример.
1) $|5| = 5$, так как точка B (5) удалена от начала отсчета на пять единичных отрезков.
2) $|-6| = 6$, так как точка C (–6) удалена от начала отсчета на шесть единичных отрезков.



Свойства модуля
1) $|a| = |-a|$
2) $|a|^2 = a^2$
3) $|a| \geq 0$
4) $|a| \geq a$
5) $|a| \geq -a$
6) $|u| \cdot |v| = |u \cdot v|$
7) $\dfrac{|u|}{|v|} = \left|\dfrac{u}{v}\right|$

8) Утверждения, позволяющие переходить от любого неравенства к равносильному уравнению:

$$m<0 \Leftrightarrow \frac{|m|}{m}+1=0,$$

$$m \le 0 \Leftrightarrow |m|+m=0,$$

$$m \ge 0 \Leftrightarrow |m|-m=0,$$

$$m>0 \Leftrightarrow \frac{|m|}{m}-1=0.$$

При решении уравнений (неравенств), содержащих знак модуля, следует разбить область определения уравнения (неравенства) на множества, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждом таком множестве уравнение (неравенство) нужно записать без знака модуля и решить его на этом множестве. Объединение множеств решений, найденных на всех частях ОДЗ уравнения (неравенства), составляет множество всех решений уравнения (неравенства).

Пример.

Решить уравнение.

$|x| = x^2 + x - 3.$

Р е ш е н и е.

Уравнение равносильно совокупности систем $\begin{cases} x \ge 0, \\ x = x^2 + x - 3, \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 0, \\ -x = x^2 + x - 3. \end{cases}$

Решим первую систему $\begin{cases} x \ge 0, \\ x = x^2 + x - 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 = 3, \end{cases}$

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3}, \\ x = -\sqrt{3}, \end{array}\right. \end{cases} \qquad x = \sqrt{3}.$$

Решим вторую систему.

$$\begin{cases} x < 0, \\ -x = x^2 + x - 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -3, \end{array}\right. \end{cases} \quad x = -3.$$

О т в е т : $-3; \sqrt{3}.$

Рассмотрим уравнения (неравенства) вида

$$|f_1(x)|+|f_2(x)|+|f_3(x)|+\ldots+|f_n(x)| \vee g(x),$$

где $f_1(x), f_2(x), \ldots, g(x)$ — некоторые функции.

Знак $\vee$ — знак сравнения ($=, \geq, \leq, >, <$).

Если последовательно раскрывать модули, то получится совокупность большого количества систем, решение будет громоздким. Такие уравнения проще решать методом интервалов. Для этого находим все точки, в которых хотя бы одна из функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ меняет знак. Эти точки делят область определения уравнения (неравенства) на промежутки, на каждом из которых все функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ сохраняют знак.

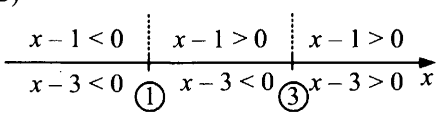
Затем, используя определение абсолютной величины, переходим от уравнения к совокупности систем, не содержащих знаков модуля.

Пример 1.

Решить уравнение $|x-1| + |x-3| = 3$.

Решение.

Область определения данного уравнения — вся числовая прямая. Методом интервалов находим интервалы знакопостоянства выражений $(x-1)$, $(x-3)$



Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1, \\ -(x-1)-(x-3)=3, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \leq x<3, \\ (x-1)-(x-3)=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3, \\ (x-1)+(x-3)=3, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1, \\ -2x=-1, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \leq x<3, \\ 2=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3, \\ 2x=7, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1, \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3, \\ x=3{,}5, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=0{,}5, \\ x=3{,}5. \end{array}\right.$$

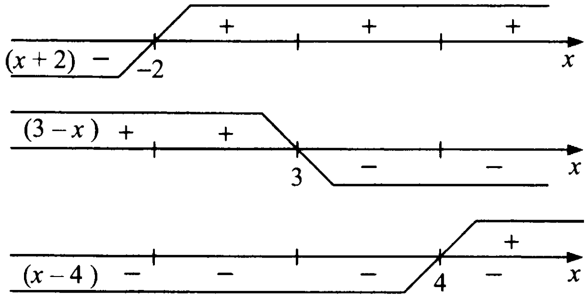
Ответ: 0,5; 3,5.

Пример 2.

Решить уравнение $|3-x| + |x+2| - |x-4| = 3$.

Р е ш е н и е.

Найдем значения x, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, равны нулю: $x = -2$; $x = 3$; $x = 4$. Эти точки делят область определения уравнения на промежутки, на каждом из которых выражения $(3 - x)$, $(x + 2)$, $(x - 4)$ сохраняют свой знак. Затем, используя определение абсолютной величины, перейдем от исходного уравнения к совокупности систем, не содержащих знаков модуля.



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2, \\ (3-x)-(x+2)+(x-4)=3 \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x<3, \\ (3-x)+(x+2)+(x-4)=3 \end{cases} \\ \begin{cases} 3\le x<4, \\ -(3-x)+(x+2)+(x-4)=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 4, \\ -(3-x)+(x+2)-(x-4)=3 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \begin{cases} x<-2, \\ x=-6 \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x<3, \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3\le x<4, \\ x=2\frac{2}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 4, \\ x=0 \end{cases} \end{array} \qquad \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=2. \end{array}\right.$$

О т в е т: -6; 2.

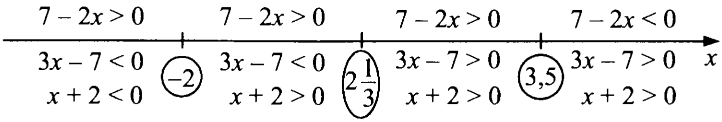
Пример 3.

Решить неравенство

$|7-2x| < |3x-7| + |x+2|$.

Р е ш е н и е.

Точки $x = -2$, $x=2\frac{1}{3}$, $x = 3{,}5$ делят числовую ось (область определения неравенства) на четыре промежутка: $x<-2$, $-2\le x<2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{3}\le x<3{,}5$, $x\ge 3{,}5$. Методом интервалов определим интервалы знакопостоянства выражений $(x + 2)$, $(3x - 7)$, $(7 - 2x)$:



Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\7-2x<-(3x-7)-(x+2)\end{cases}\\\begin{cases}-2\le x<2\frac{1}{3},\\7-2x<-(3x-7)+(x+2)\end{cases}\\\begin{cases}2\frac{1}{3}\le x<3{,}5,\\7-2x<(3x-7)+(x+2)\end{cases}\\\begin{cases}x\ge 3{,}5,\\-(7-2x)<(3x-7)+(x+2);\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\x<-1\end{cases}\\\begin{cases}-2\le x<2\frac{1}{3},\\0x<2\end{cases}\\\begin{cases}2\frac{1}{3}\le x<3{,}5,\\x>2\end{cases}\\\begin{cases}x\ge 3{,}5,\\x>-1;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x<-2,\\-2\le x<2\frac{1}{3},\\2\frac{1}{3}\le x<3{,}5,\\x\ge 3{,}5\end{array}\right.\quad x\in R$$

Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

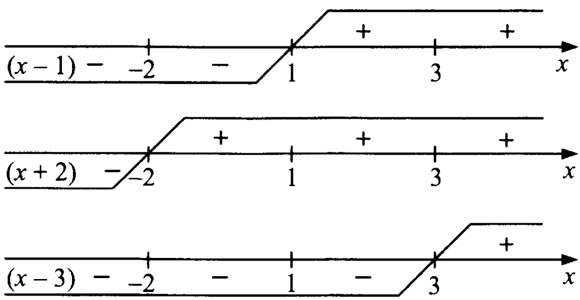
Пример 4.

Решить неравенство

$|x-1|+|x+2|-|x-3|>4.$

Решение.

Точки $x=-2$, $x=1$, $x=3$ делят числовую ось (область определения неравенства) на четыре промежутка, на которых выражения $(x-1)$, $(x+2)$, $(x-3)$ сохраняют свой знак.



Используя определение абсолютной величины, перейдем от исходного неравенства к совокупности систем, не содержащих знак модуля:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\ -(x-1)-(x+2)+(x-3)>4\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le x<1,\\ -(x-1)+(x+2)+(x-3)>4\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<3,\\ (x-1)+(x+2)+(x-3)>4\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ (x-1)+(x+2)-(x-3)>4;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\ x<-8\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le x<1,\\ x>4,\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<3,\\ x>2\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ x>0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x<-8,\\ 2<x<3,\\ x\ge 3.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-8)\cup(2;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнения.

а) $|x-1|+|x-2|+|x-3|=2$.

Ответ: 2.

б) $|x-3|+2|x+1|=4$.

Ответ: -1.

в) $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$.

Ответ: -2.

г) $|7x-12|-|7x-11|=1$.

Ответ: $x\le\frac{11}{7}$.

д) $|x|+|7-x|+2|x-2|=4$.

Ответ: $\varnothing$.

2. Решите неравенства.

а) $|x-2|+|x-3|+|2x-8|<9$.

Ответ: $(1;\ 5{,}5)$.

б) $|x-1|-|x|+|2x+3|>2x+4$.

Ответ: $(-\infty;-1{,}5)$.

в) $|x-1|+|x+2|-|x-3|>4$.

Ответ: $(-\infty;-8)\cup(2;+\infty)$.

г) $|x+2|+|x+1|+|x-4|\ge 9$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{8}{3}\right]\cup[2;+\infty)$.

д) $|x-1|+|2-x|>3+x$.

Ответ: $(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$.

Использование некоторых равносильных преобразований основных неравенств с модулем

Приведем таблицу равносильных преобразований основных неравенств с модулем и покажем применение их при решении неравенств.

Неравенство	$\lvert f\rvert < g$	$\lvert f\rvert \le g$	$\lvert f\rvert > g$	$\lvert f\rvert \ge g$	f и g функции
Равносильное ему преобразование	$\begin{cases} -f < g, \\ f < g \end{cases}$	$\begin{cases} -f \le g, \\ f \le g \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} -f > g \\ f > g \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} -f \ge g \\ f \ge g \end{array}\right.$	

Примечание.

Любое уравнение или неравенство определяет множество его решений. Пусть даны два неравенства или уравнения, либо и то, и другое. M_1 и M_2 — множества их решений.

Решить систему — значит найти все общие элементы множеств M_1 и M_2, то есть найти пересечение множеств M_1 и M_2.

Решить совокупность — значит найти все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств M_1 и M_2, то есть найти объединение множеств M_1 и M_2.

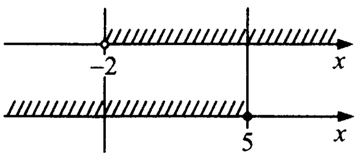
Пример 1.

Найти решение системы

а) $\begin{cases} x > -2, \\ x \le 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < 4, \\ x \le 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 3, \\ x < 0. \end{cases}$

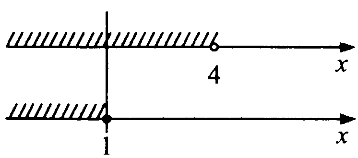
Решение.

а) $\begin{cases} x > -2, \\ x \le 5 \end{cases}$



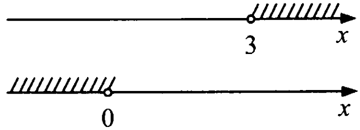
Ответ: $(-2; 5]$.

б) $\begin{cases} x < 4, \\ x \le 1 \end{cases}$



Ответ: $(-\infty; 1]$.

в) $\begin{cases} x > 3, \\ x < 0 \end{cases}$



О т в е т : решений нет.

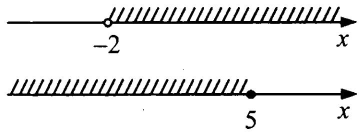
Пример 2.

Найдите решение совокупности

а) $\left[\begin{array}{l} x > -2, \\ x \le 5; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x < 4, \\ x \le 1; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x < 0. \end{array}\right.$

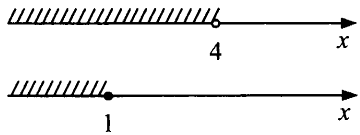
Р е ш е н и е .

а) $\left[\begin{array}{l} x > -2, \\ x \le 5 \end{array}\right.$



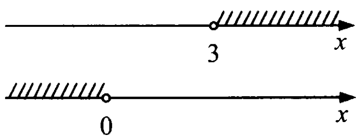
О т в е т : $(-\infty; +\infty)$.

б) $\left[\begin{array}{l} x < 4, \\ x \le 1 \end{array}\right.$



О т в е т : $(-\infty; 4)$.

в) $\left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x < 0 \end{array}\right.$



О т в е т : $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Пример 3.

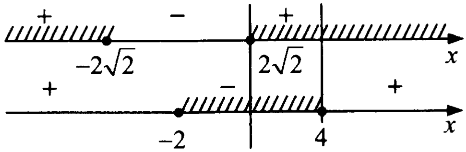
Решить неравенство $|x^2 - x - 8| \le x$.

Р е ш е н и е .

$|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -f(x) \le g(x), \\ f(x) \le g(x), \end{cases}$ поэтому

$\begin{cases} -x^2 + x + 8 \le x, \\ x^2 - x - 8 \le x, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 8 \ge 0, \\ x^2 - 2x - 8 \le 0, \end{cases}$

$\begin{cases} \left(x - 2\sqrt{2}\right)\left(x + 2\sqrt{2}\right) \ge 0, \\ (x - 4)(x + 2) \le 0, \end{cases}$



О т в е т : $\left[2\sqrt{2}; 4\right]$.

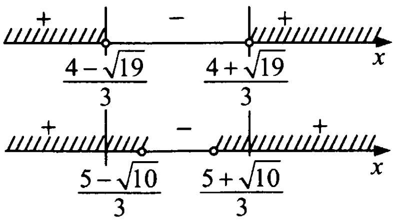
Пример 4.

Решить неравенство $3x^2 - |x - 3| > 9x - 2$.

Р е ш е н и е .

Приведем неравенство к виду $|x - 3| < 3x^2 - 9x + 2$ и заменим его равносильной ему системой, так как неравенство $|f| < q \Leftrightarrow \begin{cases} -f < q, \\ f < q. \end{cases}$

$$\begin{cases} -x+3 < 3x^2 - 9x + 2, \\ x - 3 < 3x^2 - 9x + 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 - 8x - 1 > 0, \\ 3x^2 - 10x + 5 > 0, \end{cases}$$



О т в е т : $\left(-\infty; \dfrac{4-\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4+\sqrt{19}}{3}; +\infty\right)$.

Пример 5.

Решить неравенство $x^2 - 7x + 12 < |x - 4|$.

Р е ш е н и е .

Неравенство имеет вид $|f(x)| > g(x)$ и равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} -x+4 > x^2 - 7x + 12, \\ x - 4 > x^2 - 7x + 12, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 8 < 0, \\ x^2 - 8x + 16 < 0. \end{array}\right.$$

Поскольку второе неравенство совокупности решений не имеет, а $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$, то множество решений совокупности и исходного неравенства есть интервал (2; 4).

О т в е т : (2; 4).

Пример 6.

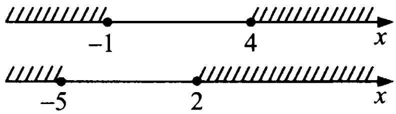
Решить неравенство

$3|x-1|+x^2\geq 7.$

Р е ш е н и е .

Данное неравенство можно переписать в виде $|3x-3|\geq 7-x^2$, и, следовательно, оно равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}-3x+3\geq 7-x^2,\\ 3x-3\geq 7-x^2,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x^2-3x-4\geq 0,\\ x^2+3x-10\geq 0.\end{array}\right.$$



Поскольку $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$, а $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$, то решение полученной совокупности, а следовательно, и исходного неравенства состоит из объединения двух промежутков $(-\infty;-5]\cup[4;+\infty)$.

О т в е т : $(-\infty;-5]\cup[4;+\infty)$.

Пример 7.

Решить неравенство $\big|3x-|x-4|\big|\leq 2.$

Р е ш е н и е .

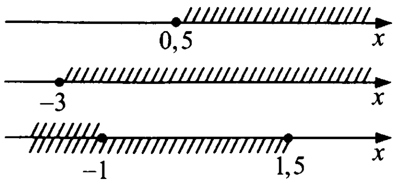
Так как $|f(x)|\leq g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}-f(x)\leq g(x),\\ f(x)\leq g(x),\end{cases}$ то исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}-3x+|x-4|\leq 2,\\ 3x-|x-4|\leq 2;\end{cases} \qquad \begin{cases}|x-4|\leq 3x+2,\\ |x-4|\geq 3x-2.\end{cases}$$

Первое неравенство в системе относительно $|x-4|$ имеет вид $|f(x)|\leq g(x)$, а второе имеет вид $|f(x)|\geq g(x)$.

Применяя равносильные преобразования, получим:

$$\begin{cases}-x+4\leq 3x+2,\\ x-4\leq 3x+2,\\ \left[\begin{array}{l}-x+4\geq 3x-2\\ x-4\geq 3x-2,\end{array}\right.\end{cases} \qquad \begin{cases}4x\geq 2,\\ 2x\geq -6,\\ \left[\begin{array}{l}4x\leq 6\\ 2x\leq -2,\end{array}\right.\end{cases} \qquad \begin{cases}x\geq\frac{1}{2},\\ x\geq -3,\\ \left[\begin{array}{l}x\leq 1{,}5\\ x\leq -1.\end{array}\right.\end{cases}$$



О т в е т : [0,5; 1,5].

Пример 8.

Решить неравенство $|3x+5|+|2x-1|<11$.

Р е ш е н и е .

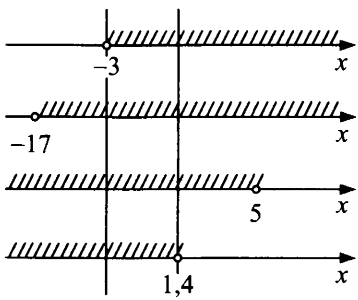
Перепишем неравенство в виде

$|3x+5|<11-|2x-1|$.

Так как $|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -f(x)<g(x), \\ f(x)<g(x), \end{cases}$ то исходное неравенство равносильно системе $\begin{cases} -3x-5<11-|2x-1|, \\ 3x+5<11-|2x-1|. \end{cases}$ Перепишем последнюю систему в виде

$\begin{cases} |2x-1|<3x+16, \\ |2x-1|<6-3x \end{cases}$ и применим равносильные преобразования.

В результате получим: $\begin{cases} -2x+1<3x+16, \\ 2x-1<3x+16, \\ -2x+1<6-3x, \\ 2x-1<6-3x, \end{cases}$ $\begin{cases} 5x>-15, \\ x>-17, \\ x<5, \\ 5x<7. \end{cases}$



(–3; 1,4).

О т в е т : (–3; 1,4).

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить неравенства:

а) $\left|x^2-6x+8\right|\le 4-x.$

Ответ: $[1;3]\cup\{4\}.$

б) $\left|x^2-2x-3\right|<3x-3.$

Ответ: $(2;5).$

в) $|3x+2|-7x\le x^2+4.$

Ответ: $\left(-\infty;-5-\sqrt{19}\right)\cup\left[\sqrt{2}-2;+\infty\right).$

г) $|x-6|\ge x^2-5x+9.$

Ответ: $[1;3].$

д) $\left|2x^2-9x+15\right|\ge 20.$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[5;+\infty).$

2. Решить неравенства:

а) $\left|2x-|x-2|\right|\le 3.$

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right].$

б) $|5-x|<|2-x|+|2x-7|.$

Ответ: $(-\infty;2)\cup(3{,}5;+\infty).$

в) $|x-2|>2+x-|3-x|.$

Ответ: $(-\infty;1)\cup(7;+\infty).$

г) $\left||x|-1\right|<1-x.$

Ответ: $(-\infty;0).$

д) $\left||x-1|-5\right|\le 2.$

Ответ: $[-6;-2]\cup[4;8].$

Рассмотрим несколько примеров задач **с модулем и параметром**, решение которых упрощается с использованием равносильностей, рассмотренных выше.

Пример 1.

При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - |x - a| - |x-1| + 3 \ge 0$ выполняется при всех значениях x?

Р е ш е н и е.

Перепишем неравенство в виде $|x - 1| \le x^2 - |x - a| + 3$. Оно имеет вид $|f(x)| \le g(x)$. Воспользуемся равносильным переходом

$$\begin{cases} -f(x) \le g(x), \\ f(x) \le g(x). \end{cases} \qquad (*)$$

Получим систему, равносильную исходному неравенству:

$$\begin{cases} -x+1 \le x^2 - |x-a| + 3, \\ x-1 \le x^2 - |x-a| + 3. \end{cases}$$

Перепишем последнюю систему в виде $\begin{cases} |x-a| \le x^2 + x + 2, \\ |x-a| \le x^2 - x + 4. \end{cases}$

Воспользовавшись равносильным переходом $(*)$ еще раз, получим

$$\begin{cases} -x+a \le x^2 + x + 2, \\ x-a \le x^2 + x + 2, \\ -x+a \le x^2 - x + 4, \\ x-a \le x^2 - x + 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 2x + (2-a) \ge 0, \\ x^2 + (2+a) \ge 0, \\ x^2 + (4-a) \ge 0, \\ x^2 - 2x + (4+a) \ge 0. \end{cases}$$

Выполнение для всех x исходного неравенства равносильно выполнению для всех x всех неравенств последней системы. А это равносильно тому, что дискриминанты всех четырех квадратных трехчленов неположительны:

$$\begin{cases} D_1 \le 0, \\ D_2 \le 0, \\ D_3 \le 0, \\ D_4 \le 0, \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} 4 - 4(2-a) \le 0, \\ -4(2+a) \le 0, \\ -4(4-a) \le 0, \\ 4 - 4(4+a) \le 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $-2 \le a \le 1$.

О т в е т: $-2 \le a \le 1$.

Пример 2.

Найдите все значения параметра a, для которых наименьшее значение функции

$y = x^2 + |x - a| + |x - 1|$ больше 2.

Р е ш е н и е.

По условию задачи для всех x должно выполняться неравенство

$$x^2 + |x - a| + |x - 1| > 2. \qquad (**)$$

Относительно обоих модулей последнее неравенство имеет вид $|f(x)| > g(x)$.

Воспользуемся равносильным переходом

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -f(x) > g(x), \\ f(x) > g(x). \end{array}\right.$$

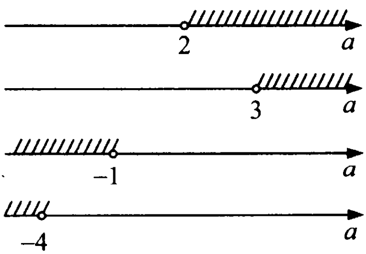
Неравенство $|x - a| > 2 - x^2 - |x - 1|$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} -x + a > 2 - x^2 - |x-1| \\ x - a > 2 - x^2 - |x-1| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-1| > -x^2 + x + 2 - a, \\ |x-1| > -x^2 - x + 2 + a \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -x + 1 > -x^2 + x + 2 - a, \\ x - 1 > -x^2 + x + 2 - a, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -x + 1 > -x^2 - x + 2 + a, \\ x - 1 > -x^2 - x + 2 + a \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + (a-1) > 0, \\ x^2 + (a-3) > 0, \\ x^2 - (1+a) > 0, \\ x^2 + 2x - (3+a) > 0. \end{array}\right.$$

Неравенство $(**)$ должно выполняться для всех x. Это равносильно тому, что для всех x выполняется хотя бы одно квадратное неравенство последней совокупности. То есть хотя бы один из четырех дискриминантов отрицательный.

$$\left[\begin{array}{l} D_1 < 0, \\ D_2 < 0, \\ D_3 < 0, \\ D_4 < 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 - 4(a-1) < 0, \\ -4(a-3) < 0, \\ 4(1+a) < 0, \\ 4 + 4(3+a) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - a < 0, \\ a - 3 > 0, \\ a + 1 < 0, \\ a + 4 < 0 \end{array}\right.$$



О т в е т : все $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Пример 3.

Найдите все значения параметра p, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $4x^2 - 20(x - 1) + 3 \cdot |4x - p| - p \le 0$ максимально.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $|12x - 3p| \le -4x^2 + 20(x - 1) + p$ и заменим его равносильной системой.

$$\begin{cases} -12x + 3p \le -4x^2 + 20(x-1) + p, \\ 12x - 3p \le -4x^2 + 20(x-1) + p, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 32x + 2p + 20 \le 0, \\ 4x^2 - 8x - 4p + 20 \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \le -2x^2 + 16x - 10, \\ p \ge x^2 - 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 \le p \le -2x^2 + 16x - 10. \qquad (***)$$

Чтобы параметр p существовал, должно выполняться неравенство

$x^2 - 2x + 5 \le -2x^2 + 16x - 10,$

$3x^2 - 18x + 15 \le 0,$

$1 \le x \le 5.$

Таким образом, решениями исходного неравенства **хотя бы при одном** значении параметра могут быть все x из отрезка [1; 5]. Следовательно, целочисленными решениями исходного неравенства могут быть только числа 1, 2, 3, 4, 5 из отрезка [1; 5]. Поочередно подставим выбранные целые числа в двойное неравенство $(***)$.

Получим

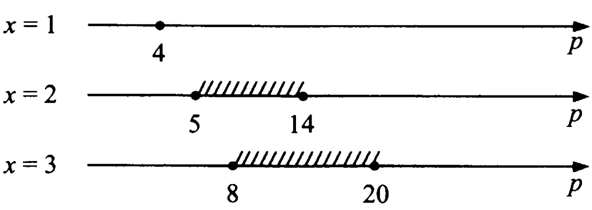
$x = 1$ при $4 \le p \le 4$,

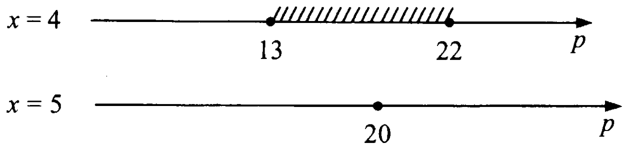
$x = 2$ при $5 \le p \le 14$,

$x = 3$ при $8 \le p \le 20$,

$x = 4$ при $13 \le p \le 22$,

$x = 5$ при $20 \le p \le 20$.





Значения параметра p	$(-\infty; 4)$	4	$(4; 5)$	5	$(5; 8)$	8	$(8; 13)$	13	$(13; 14)$	14	$(14; 20)$	20	$(20; 22)$	22	$(22; +\infty)$
Целочисленные решения	—	1	—	2	2	2; 3	2; 3	2; 3; 4	2; 3; 4	2; 3; 4	3; 4	3; 4; 5	4	4	—
Количество целочисленных решений	0	1	0	1	1	2	2	3	3	3	2	3	1	1	0

Очевидно, что максимальное количество целочисленных решений равно трем и это достигается при $13 \le p \le 14$ или $p = 20$.

Ответ: $13 \le p \le 14$; $p = 20$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для всех a решить неравенство: $|x - 3a| - |x + a| < 2a$.

   Ответ: при $a < 0$ $x < 2a$; при $a = 0$ решений нет; при $a > 0$ $x > 0$.

2. Для всех a решить неравенство $|x - a| - 2a > |x - 3a|$.

   Ответ: при $a < 0$ $x < a$; при $a \ge 0$ решений нет.

3. Для всех a решить неравенство: $|x + 2a| + |x - a| < 3x$.

   Ответ: при $a < 0$ $x > -a$; при $a \ge 0$ $x > a$.

4. Найти все значения параметра a, при которых наименьшее значение функции $y = 2|x-1| + |x+3| - 2|x - a^2 - a|$ больше 1.

   Ответ: $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} < a < \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

5. Для любого значения параметра p решить неравенство $|2x + 21p| - 2 \cdot |2x - 21p| < x - 21p$.

   Ответ: при $p < 0$ $x \in (-\infty; 42p) \cup (6p; +\infty)$; при $p = 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; при $p > 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup (28p; +\infty)$.

Использование специальных схем равносильности

Сумма модулей

Иногда уравнение с модулями можно решить быстрее, если удастся использовать правило: **сумма модулей равна алгебраической сумме подмодульных выражений тогда и только тогда, когда каждое выражение имеет тот знак, с которым оно входит в алгебраическую сумму**.

Пример 1.

Решить уравнение

$|x^2-3|+|x^2-7x+12|-7x+15=0.$

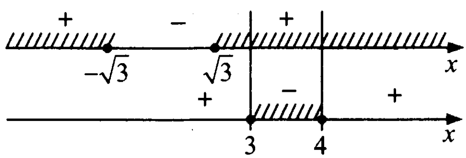
Р е ш е н и е.

Выделим сумму модулей:

$|x^2-3|+|x^2-7x+12|=7x-15.$

Выясним, можно ли $7x-15$ представить в виде алгебраической суммы подмодульных выражений.

Так как $7x-15=(x^2-3)-(x^2-7x+12)$, то исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases}x^2-3\ge 0,\\ x^2-7x+12\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\ge 0,\\ (x-3)(x-4)\le 0\end{cases}$



О т в е т: $3\le x\le 4$.

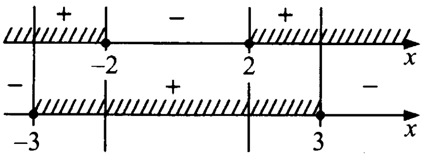
Пример 2.

Решить уравнение $|x^2-4|+|9-x^2|=5.$

Р е ш е н и е.

Так как $(x^2-4)+(9-x^2)=5$, то исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}x^2-4\ge 0,\\ 9-x^2\ge 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)(x+2)\ge 0,\\ (3-x)(3+x)\ge 0\end{cases}$$



Ответ: $[-3; -2] \cup [2; 3]$.

Пример 3.

Решить уравнение

$$|2x-1|+|2x+1|+|2x-2|+|2x+2|+\ldots+|2x-100|+|2x+100|=400x.$$

Решение.

Так как $(2x - 1) + (2x + 1) + \ldots + (2x - 100) + (2x + 100) = 400x$, то исходное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ 2x+1\geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x-100\geq 0 \\ 2x+100\geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 50.$$

Ответ: $x \geq 50$.

Сформулируем еще одно свойство суммы модулей.

Сумма модулей равна модулю алгебраической суммы подмодульных выражений тогда и только тогда, когда одновременно все выражения имеют тот знак, с которым они входят в алгебраическую сумму, либо одновременно все выражения имеют противоположный знак.

Например, $|a_1|+|a_2|+|a_3|=|a_1-a_2+a_3| \Leftrightarrow \begin{cases} a_1\geq 0, \\ a_2\leq 0, \\ a_3\geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a_1\leq 0, \\ a_2\geq 0, \\ a_3\leq 0. \end{cases}$

Пример 1.

Решить уравнение $2|x-5|+|4-x|-|2x-1|+5|x-3|=0$.

Решение.

Внесем коэффициенты 2 и 5 под знак модуля и выделим сумму модулей:

$$|2x-10|+|4-x|+|5x-15|=|2x-1|.$$

Найдем комбинацию знаков подмодульных выражений $(2x - 10)$, $(4 - x)$, $(5x - 15)$, при которой алгебраическая сумма этих выражений равна подмодульному выражению правой части уравнения, то есть $2x-1$.

В данном примере это проще обнаружить по константам:

$-(-10)+4+(-15)=-1$.

Итак, $-(2x-10)+(4-x)+(5x-15)=2x-1$.

То есть уравнение имеет вид $|a_1|+|a_2|+|a_3|=|-a_1+a_2+a_3|$.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем по правилу, приведенному выше.

Получим $\begin{cases}2x-10\le 0,\\ 4-x\ge 0,\\ 5x-15\ge 0\end{cases}$ или $\begin{cases}2x-10\ge 0,\\ 4-x\le 0,\\ 5x-15\le 0.\end{cases}$

Откуда $\begin{cases}x\le 5,\\ x\le 4,\\ x\ge 3\end{cases}$ или $\begin{cases}x\ge 5,\\ x\ge 4,\\ x\le 3,\end{cases}$ то есть $3\le x\le 4$.

О т в е т : $3\le x\le 4$.

Пример 2.

Решить уравнение $|3x-15|+|4-x|+|2x-6|=|4x-17|$.

Р е ш е н и е .

Так как $(3x-15)+(4-x)+(2x-6)=4x-17$, то уравнение имеет вид $|a_1|+|a_2|+|a_3|=|a_1+a_2+a_3|$ и исходное уравнение равносильно совокупности двух систем: $\begin{cases}3x-15\ge 0,\\ 4-x\ge 0,\\ 2x-6\ge 0\end{cases}$ или $\begin{cases}3x-15\le 0,\\ 4-x\le 0,\\ 2x-6\le 0.\end{cases}$

Откуда $\begin{cases}x\ge 5,\\ x\le 4,\\ x\ge 3\end{cases}$ или $\begin{cases}x\le 5,\\ x\ge 4,\\ x\le 3,\end{cases}$ то есть решений нет.

О т в е т : решений нет.

В некоторых случаях упрощают решение уравнений с модулем следующие утверждения.

1. **Равенство $|a|+|b|=a+b$ имеет место тогда и только тогда, когда $a\ge 0$ и $b\ge 0$.**
2. **Равенство $|a+b|=|a|+|b|$ имеет место тогда и только тогда, когда $ab\ge 0$.**
3. **$|a|+|b|=a-b$ имеет место тогда и только тогда, когда $a\ge 0$ и $b\le 0$.**

Пример 1.

Решить уравнение $|x-1| + |x-3| = 2x-4$.

Р е ш е н и е .

Так как $|a| + |b| = a + b$, то заменим исходное уравнение равносильной ему системой $\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ x-3 \ge 0. \end{cases}$ Получим $x \ge 3$.

О т в е т : $x \ge 3$.

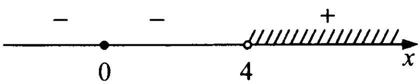
Пример 2.

Решить уравнение $\left|\dfrac{4x}{x-4}\right| + |x| = \dfrac{x^2}{|x-4|}$.

Р е ш е н и е .

Поскольку $\dfrac{4x}{x-4} + x = \dfrac{4x + x^2 - 4x}{x-4} = \dfrac{x^2}{x-4}$, то исходное уравнение может быть переписано в виде $\left|\dfrac{4x}{x-4}\right| + |x| = \left|\dfrac{4x}{x-4} + x\right|$.

Данное уравнение равносильно неравенству $\dfrac{4x}{x-4} \cdot x \ge 0$, то есть $\dfrac{x^2}{x-4} \ge 0$.



О т в е т : $(4; +\infty) \cup \{0\}$.

Пример 3.

Решить уравнение $|x-3||x-1| + |x-4||x-5| - 5x + 17 = 0$.

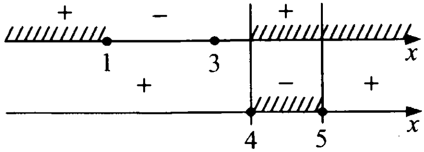
Р е ш е н и е .

Приведем уравнение к виду

$$|(x-3)(x-1)| + |(x-4)(x-5)| = 5x - 17,$$

$$|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 9x + 20| = 5x - 17.$$

Так как $(x^2 - 4x + 3) - (x^2 - 9x + 20) = 5x - 17$, то уравнение имеет вид $|a| + |b| = a - b$ и равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \ge 0, \\ x^2 - 9x + 20 \le 0 \end{cases}$



О т в е т : $4 \le x \le 5$.

Покажем использование еще одной равносильности:

$$|a| \vee |b| \Leftrightarrow a^2 \vee b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) \vee 0 .$$

Пример 4.

Решить неравенство $\dfrac{(|x-5|-|x-1|)(|2x-8|-|x+2|)}{|8-x|-|x-2|} < 0.$

Р е ш е н и е .

Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\left(|x-5|^2-|x-1|^2\right)\left(|2x-8|^2-|x+2|^2\right)}{|8-x|^2-|x-2|^2} < 0.$$

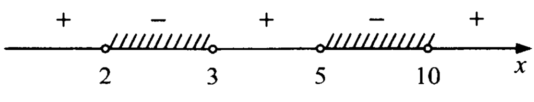
Так как $|a|^2 = a^2$, то неравенство примет вид

$$\frac{\left((x-5)^2-(x-1)^2\right)\left((2x-8)^2-(x+2)^2\right)}{(8-x)^2-(x-2)^2} < 0.$$

Раскладывая на множители все разности квадратов, имее

$$\frac{-4(2x-6)(x-10)(3x-6)}{6\cdot(10-2x)} < 0.$$

Решим методом интервалов последнее неравенство



О т в е т : (2; 3) $\cup$ (5; 10).

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1) $|x^2+4x+1| + |x^2-3x+2| = 7x-1.$

О т в е т : $1 \le x \le 2$.

2) $|x^2 + 2x - 3| + |8 - x^2 - 2x| = 5.$

Ответ: $[-4; -3] \cup [1; 2]$.

3) $|x^2 - 1| + |x^2 - 5x + 6| - 5x + 7 = 0.$

Ответ: $2 \le x \le 3$.

4) $2|x - 4| + 3|3 - x| - |1 + 2x| + 5|x - 2| = 0.$

Ответ: 3.

5) $|6x - 12| + |3 - 2x| + |4x - 4| = |8x - 13|.$

Ответ: решений нет.

6) $|3x + 5| + |3x + 3| = 6x + 8.$

Ответ: $x \ge -1$.

7) $\left|\dfrac{4x+4}{x-3}\right| + |x+1| = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{|x-3|}.$

Ответ: $(3; +\infty) \cup \{-1\}$.

8) $|x + 2| \cdot |x + 4| + |x + 1| \cdot |x| - 5x - 8 = 0.$

Ответ: $-1 \le x \le 0$.

9) $\dfrac{\left(|x^2 - 4| - 5\right) \cdot \left(|x + 5| - 8\right)}{\left(|x - 3| - |x - 1|\right) \cdot |x|} > 0.$

Ответ: $(-\infty; -13) \cup (-3; 0) \cup (0; 2)$.

Использование геометрического смысла модуля

Напомним, что модулем числа a называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки A (a).

Этому утверждению равносильно утверждение, что $|a - b|$ — расстояние между точками A (a) и B (b).

Сумма $|x - a| + |x - b|$ — сумма расстояний от точки X (x) до точек A (a) и B (b) на числовой прямой Ox. Эта сумма не может быть меньше расстояния между точками A (a) и B (b), то есть $|x - a| + |x - b| \ge |a - b|$.

Если $|x - a| + |x - b| = |a - b|$, то x — любая точка отрезка $[a; b]$ или $[b; - a]$.

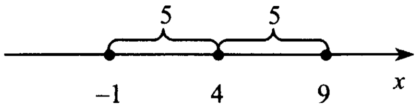
И если отрезок не вырожден в точку, то есть $a \ne b$, то таких точек x бесконечно много.

Если $|x-a|+|x-b|>|a-b|$, то существуют ровно две различные точки вне отрезка, симметрично расположенные относительно середины отрезка $[a; b]$ или $[b; a]$.

Итак, решить уравнение $|x-a|=c(c>0)$ — значит найти все точки на числовой прямой Ox, которые отстоят от точки с координатой a на расстояние c. Таких точек две: точка с координатой $(c + a)$ и точка с координатой $(a - c)$.

Пример 1.

Решить уравнение $|x-4| = 5$.



Ответ: $9; -1$.

Пример 2.

Решить уравнение $|x-5| + |x-6| = 18$ — значит найти все такие точки на числовой прямой Ox, для каждой из которых сумма расстояний от нее до точек с координатами 5 и 6 равна 18.

Так как $|x-5| + |x-6| > |6-5|$, то существует ровно две различные точки вне отрезка, симметрично расположенные относительно середины отрезка $[5; 6]$, координаты которых являются решениями исходного уравнения. Это $x = -3{,}5$ и $x = 14{,}5$.

Ответ: $-3{,}5; 14{,}5$.

Решить уравнение $|x-a| - |x-b| = c$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$ — значит найти на числовой прямой Ox все такие точки, для каждой из которых разность расстояния от нее до точки с координатой a и расстояния от нее до точки с координатой b равна c.

Пример 1.

Решить уравнение $|x-2| - |x-5| = 3$.

Решение.

На числовой прямой Ox нужно найти все такие точки, для каждой из которых разность расстояний от нее до точки с координатой (2) и расстояния от нее до точки с координатой (5) равна 3. Так как длина отрезка $[2; 5]$ равна 3, то ясно, что любая точка с координатой $x \geq 5$ удовлетворяет, а любая точка с координатой $x < 5$ не удовлетворяет ему. Таким образом, решением исходного уравнения является множество всех чисел из промежутка $[5; +\infty)$.

Ответ: $[5; +\infty)$.

Пример 2.

Для любого значения параметра a решить неравенство

$|x - a^2| \le 5 - |4a - x - 9|$.

Решение.

Приведем неравенство к виду $|x - a^2| + |x - (4a - 9)| \le 5$.

Таким образом, на числовой прямой Ox требуется найти точки x, сумма расстояний от которых до двух данных точек с координатами a^2 и $(4a - 9)$ не больше 5. Найдем расстояние между точками a^2 и $(4a - 9)$:

$$\left|a^2 - (4a - 9)\right| = \left|a^2 - 4a + 9\right| = a^2 - 4a + 9 = (a - 2)^2 + 5 \ge 5.$$

Так как сумма расстояний до двух точек не может быть меньше расстояния между этими точками, то при $a \ne 2$ решений нет.

Если $a = 2$, то исходное неравенство переходит в равенство, решениями которого являются все значения x из промежутка $[4a - 9; a^2] = [-1; 4]$.

Ответ: при $a \ne 2$ решений нет;

при $a = 2$ $-1 \le x \le 4$.

Пример 3.

Решить уравнение $|x| + |x + 2| = 2$.

Решение.

$|x| + |x + 2|$ — сумма расстояний от точки с координатой (x) на числовой прямой Ox до точек с координатами (0) и (–2).

Так $|x| + |x + 2| = 2$, то есть сумма расстояний от точек (0) и (–2) равна длине отрезка $[-2; 0]$, то x — любая точка данного отрезка, то есть $-2 \le x \le 0$.

Ответ: $-2 \le x \le 0$.

Пример 4.

Исследовать количество решений уравнения в зависимости от параметра a.

$|x - a| + |4a^2 - x| = 3 - a$.

Р е ш е н и е .

Левая часть уравнения $|x-a|+|x-4a^2|$ — сумма расстояний от точки с координатой (x) до точек с координатами (a) и ($4a^2$) на числовой прямой Ox.

Рассмотрим 1-й случай, когда сумма расстояний равна длине отрезка, то есть исходное уравнение имеет бесконечно много решений. Искомые значения параметра найдем из системы

$$\begin{cases} 3-a>0, \\ \left|a-4a^2\right|=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<3, \\ \left[\begin{array}{l} 4a^2-a=3-a, \\ a-4a^2=3-a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<3, \\ \left[\begin{array}{l} 4a^2=3, \\ 4a^2-2a+3=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a=-\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

2-й случай. Если сумма расстояний меньше длины отрезка, то есть $3-a<\left|a-4a^2\right|$, то уравнение не будет иметь решений.

Найдем соответствующие значения a.

$$\left|a-4a^2\right|>3-a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a^2-a>3-a, \\ a-4a^2>3-a \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 4a^2>3, \\ 4a^2-2a+3<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a<-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ или } a>\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3-й случай. Если сумма расстояний больше длины отрезка, т.е. $3-a>\left|a-4a^2\right|$, то уравнение будет иметь два решения.

Найдем значения параметра, соответствующие этому случаю.

$$\left|a-4a^2\right|<3-a \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2-a<3-a, \\ a-4a^2<3-a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2<3, \\ 4a^2-2a+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

О т в е т : при $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ уравнение имеет бесконечно много решений; при $-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ уравнение имеет два решения; при $a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $a>\frac{\sqrt{3}}{2}$ уравнение не имеет решений.